

**Plaquette 4 - Fonctions  $t \mapsto \exp(at)$ ,  
suites géométriques et méthode d'Euler**

**Fonction exponentielle — Première spé maths**

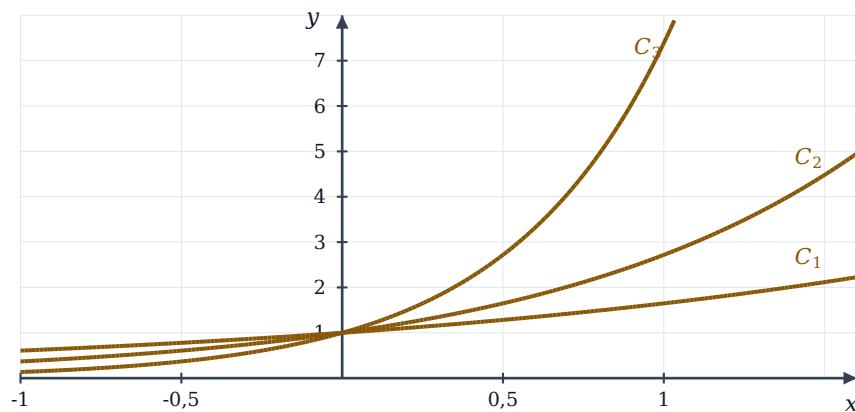
Exercices

**Méthode**

Les fonctions  $t \mapsto e^{at}$  décrivent les évolutions à **taux constant en temps continu** ; leurs valeurs aux temps entiers forment une **suite géométrique** de raison  $e^a$ . La méthode d'Euler fait le chemin inverse : elle approche l'exponentielle par une suite géométrique, pas à pas.

**Exercice 1 - Reconnaître des courbes**

Les courbes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  représentent les fonctions  $t \mapsto e^{0,5t}$ ,  $t \mapsto e^t$  et  $t \mapsto e^{2t}$ , dans le désordre. Associer chaque courbe à sa fonction en justifiant par un calcul.



*Trois courbes de fonctions  $t \mapsto e^{kt}$*

**Exercice 2 - Symétrie**

Soit  $k > 0$ ,  $f(t) = e^{kt}$  et  $g(t) = e^{-kt}$ .

- Montrer que  $g(t) = f(-t)$  pour tout réel  $t$ . Interpréter graphiquement.
- Donner les variations de  $f$  et de  $g$ .

**Exercice 3 - Variations d'une fonction affine en exp**

Soit  $f(t) = 3e^{-2t} + 1$  sur  $[0; +\infty[$ .

- Calculer  $f(0)$  et  $f'(t)$ .
- En déduire le sens de variation de  $f$  et justifier que  $f(t) > 1$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Exercice 4 - Une suite géométrique**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 0$  par  $u_n = 3e^{-n}$ .

- Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  (au centième).
- Montrer que  $(u_n)$  est géométrique ; préciser sa raison et son sens de variation.

**Exercice 5 - Somme de puissances de e**

Calculer  $S = 1 + e + e^2 + e^3 + e^4$  de deux façons : en additionnant des valeurs approchées, puis avec la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

**Exercice 6 - Euler avec un grand pas**

On applique la méthode d'Euler à la fonction exponentielle avec le pas  $h = 0,5$ , en partant de  $f(0) = 1$ .

- Calculer les approximations de  $f(0,5)$ ,  $f(1)$ ,  $f(1,5)$  et  $f(2)$ .
- Les comparer aux valeurs de la calculatrice. Comment améliorer la précision ?

**Exercice 7 - Programme d'Euler**

On considère la fonction Python :

```
def euler(x, n):  
    h = x / n  
    y = 1  
    for k in range(n):  
        y = y * (1 + h)  
    return y
```

- Quelle valeur approchée cette fonction calcule-t-elle ?
- Que renvoient  $euler(1, 10)$  et  $euler(2, 4)$  ?

**Exercice 8 - Approcher le nombre e**

On pose  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pour  $n \geq 1$ .

- Calculer  $a_1$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{100}$  et  $a_{1000}$  (au millième).
- Expliquer le lien avec la méthode d'Euler.

**Exercice 9 - Euler pour une décroissance**

On cherche une fonction  $g$  telle que  $g' = -g$  et  $g(0) = 1$  ; on admet que  $g(t) = e^{-t}$ .

- Avec la méthode d'Euler et le pas  $h = 0,1$ , montrer que  $g(t + 0,1) \approx 0,9 g(t)$ .
- En déduire une approximation de  $g(1)$  et la comparer à  $e^{-1}$ .

**Exercice 10 - Vérifier une équation**

Soit  $f(t) = 5e^{2t}$ .

- Vérifier que  $f' = 2f$  et  $f(0) = 5$ .
- Proposer une fonction  $g$  telle que  $g' = -0,3g$  et  $g(0) = 100$ , et vérifier.

**Exercice 11 - Retrouver le coefficient**

Une fonction  $f(t) = e^{kt}$  vérifie  $f(0) = -0,3$ .

- Déterminer  $k$ .

b) La fonction est-elle croissante ou décroissante ? Calculer  $f(10)$  au millième.

### Exercice 12 - Linéaire contre exponentielle

On compare  $f(t) = 10t$  et  $g(t) = e^t$  pour  $t \geq 0$ .

- a) Compléter un tableau de valeurs pour  $t = 1, 2, 3, 4$ .
- b) À partir de quel entier  $t$  a-t-on  $g(t) > f(t)$  ? Que montre cet exemple ?

### Exercice 13 - Taux d'évolution constant

Soit  $f(t) = e^{0,1t}$ .

- a) Montrer que  $\frac{f(t+1)}{f(t)}$  ne dépend pas de  $t$ .
- b) En déduire le taux d'évolution de  $f$  sur une unité de temps (au dixième de pourcentage).

### Exercice 14 - Quand la valeur double

Soit  $g(t) = 2e^{0,3t}$  pour  $t \geq 0$ .

- a) Calculer  $g(0)$  et justifier que  $g$  est croissante.
- b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs du temps  $t$  au bout duquel  $g(t) = 4$ .

### Exercice 15 - Suite et fonction

Un capital de 1 000 € perd 10 % de sa valeur chaque année :  $u_n = 1\,000 \times 0,9^n$ . On le compare au modèle continu  $f(t) = 1\,000 e^{-0,1t}$ .

- a) Calculer  $u_5$  et  $f(5)$ .
- b) Expliquer pourquoi les deux modèles sont proches mais différents.