

Plaquette 5 - Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle

Fonction exponentielle — Première spé maths

Exercices

Méthode

Une grandeur dont la vitesse de variation est **proportionnelle à sa valeur** ($N' = aN$) suit un modèle exponentiel $N(t) = N_0 e^{at}$: population, radioactivité, médicament, refroidissement, capital. On interprète N_0 (valeur initiale) et a (croissance si $a > 0$, décroissance si $a < 0$), puis on répond aux questions à l'aide de la dérivée et de la calculatrice.

Exercice 1 - Décroissance radioactive

Le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon (en milliards) est $N(t) = 800 e^{-0,05t}$, où t est en années.

- Calculer $N(0)$, $N(10)$ et $N(20)$ (à l'unité).
- Montrer que N est décroissante.
- La demi-vie est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux a disparu. L'encadrer par deux entiers consécutifs.

Exercice 2 - Un plat qui refroidit

Un plat sorti du four à 90°C refroidit dans une pièce à 20°C . Sa température est $T(t) = 20 + 70 e^{-0,08t}$, avec t en minutes.

- Vérifier $T(0)$ et calculer $T(10)$ au dixième.
- Étudier le sens de variation de T .
- Au bout de combien de minutes entières le plat est-il sous 40°C ?

Exercice 3 - Culture de bactéries

Une culture compte $N(t) = 500 e^{0,4t}$ bactéries au bout de t heures.

- Calculer $N(5)$ à l'unité.
- Montrer que $N'(t) = 0,4 N(t)$ et interpréter.
- Encadrer par deux entiers le temps de doublement de la population.

Exercice 4 - Capital : discret ou continu

On place 5 000 € pendant 10 ans au taux de 4 % par an.

- Avec des intérêts composés annuellement, le capital vaut $5\,000 \times 1,04^n$ au bout de n ans. Calculer sa valeur après 10 ans.
- Avec des intérêts composés « en continu », il vaut $C(t) = 5\,000 e^{0,04t}$. Calculer $C(10)$ et comparer.

Exercice 5 - Élimination d'un médicament

Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est $C(t) = 12 e^{-0,25t}$, avec t en heures. Le médicament n'est plus actif sous 3 mg/L.

- Calculer $C(4)$ au centième.
- Combien d'heures entières après l'injection faut-il la renouveler ?

Exercice 6 - Charge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur qui se charge est $u(t) = 10(1 - e^{-0,5t})$ (en volts), avec t en secondes.

- Calculer $u(0)$, $u(2)$ et $u(10)$ (au centième).
- Montrer que u est croissante et que $u(t) < 10$ pour tout t .

Exercice 7 - Pression atmosphérique

La pression atmosphérique (en hPa) à l'altitude h (en km) est modélisée par $P(h) = 1\,013 e^{-0,12h}$.

- Calculer la pression à 1 km et au sommet de l'Everest (8,8 km).
- De quel pourcentage la pression diminue-t-elle chaque fois que l'on monte de 1 km ?

Exercice 8 - Lumière sous l'eau

L'intensité lumineuse à x mètres de profondeur est $I(x) = I_0 e^{-0,4x}$, où I_0 est l'intensité en surface.

- Quel pourcentage de la lumière de surface reste-t-il à 5 m ? à 10 m ?
- Montrer que I est décroissante.

Exercice 9 - Début d'épidémie

Au début d'une épidémie, le nombre de cas est modélisé par $C(t) = 50 e^{0,2t}$, avec t en jours.

- Par combien le nombre de cas est-il multiplié chaque jour ? chaque semaine ?
- Pourquoi ce modèle ne peut-il pas rester valable longtemps ?

Exercice 10 - Datation au carbone 14

La proportion de carbone 14 restant dans un organisme t années après sa mort est $p(t) = e^{-0,000\,121t}$.

- Quelle proportion reste-t-il après 1 000 ans ? après 5 730 ans ?
- Que représente la durée 5 730 ans ?

Exercice 11 - Vitesse d'un parachutiste

Après l'ouverture de son parachute, la vitesse d'un parachutiste (en m/s) est modélisée par $v(t) = 5 + 45 e^{-0,8t}$, avec t en secondes.

- a) Calculer $v(0)$, $v(2)$ et $v(5)$ (au dixième).
- b) Étudier le sens de variation de v . Que se passe-t-il au bout de quelques secondes ?

Exercice 12 - Recette maximale

Une entreprise vend x centaines d'articles ($0 \leq x \leq 50$) ; sa recette (en euros) est $R(x) = 200x e^{-0,05x}$.

- a) Montrer que $R'(x) = (200 - 10x)e^{-0,05x}$.
- b) Pour quelle quantité la recette est-elle maximale ? Donner ce maximum à l'euro près.

Exercice 13 - Algues sur un étang

La surface couverte par des algues sur un étang de 200 m est $S(t) = 2 e^{0,1t}$ (en m), avec t en jours.

- a) Montrer que la surface est multipliée par le même nombre chaque jour ; lequel ?
- b) Au bout de combien de jours entiers les algues couvrent-elles la moitié de l'étang ?

Exercice 14 - Perfusion

Lors d'une perfusion, la concentration d'un médicament est $C(t) = 8(1 - e^{-0,5t})$ (en mg/L), avec t en heures.

- a) Calculer $C(2)$ et $C(6)$ au centième.
- b) Montrer que C est croissante et que $C(t) < 8$.
- c) La concentration efficace est 5 mg/L. Est-elle atteinte avant 2 heures ?

Exercice 15 - Deux populations

Une ville A compte $P_A(t) = 40\,000 e^{0,01t}$ habitants et une ville B $P_B(t) = 25\,000 e^{0,03t}$, où t est le nombre d'années depuis 2025.

- a) Comparer les taux de croissance annuels des deux villes.
- b) À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année B dépassera A.