

MATHÉMATIQUES

Fonction exponentielle

Première spé maths

$f' = f$ et $f(0) = 1$ • Nombre e • Relation fonctionnelle • Propriétés algébriques
Variations • Courbe • Fonctions $t \mapsto e^{at}$ • Croissance exponentielle • Méthode d'Euler

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première générale** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Analyse », section « Fonction exponentielle ». Il couvre :

- définition de la fonction exponentielle comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ (existence et unicité admises) ; notation $\exp(x)$;
- relation $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ et $\exp(x) \exp(-x) = 1$; nombre e ; notation e^x ;
- signe, sens de variation et courbe représentative ; lien avec les suites géométriques ;
- transformer une expression avec les propriétés algébriques ; dérivée de $t \mapsto e^{at}$; courbes de $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$ ($k > 0$) ;
- modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle (capital, décroissance radioactive) ;
- **algorithmes** : méthode d'Euler ; valeur approchée de e avec $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Prérequis : dérivation (dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient), suites géométriques.

Objectif : connaître la définition de la fonction exponentielle, utiliser ses propriétés algébriques, étudier des fonctions qui la contiennent et modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle.

Table des matières

1	Définition	3
2	Propriétés algébriques	4
3	Étude de la fonction exponentielle	5
4	Fonctions $t \mapsto e^{at}$	6
5	Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle	7
6	Erreurs classiques	8
7	Fiche de synthèse	8
8	Exercices d'application	8
9	Corrigés des exercices	9

1. Définition

Définition de la fonction exponentielle

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On l'appelle **fonction exponentielle** et on la note $\exp$. (Existence et unicité sont admises.)

Une fonction égale à sa dérivée

La condition $f' = f$ signifie que la vitesse de variation de f en x est égale à la valeur $f(x)$: plus la fonction est grande, plus elle croît vite. C'est le modèle des phénomènes dont la croissance est proportionnelle à la taille (population, intérêts composés en continu).

Construire une approximation : la méthode d'Euler

Pour un petit pas h , l'approximation affine donne $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x) = f(x) + hf(x) = (1+h)f(x)$. En partant de $f(0) = 1$, on obtient

$$f(nh) \approx (1+h)^n.$$

Les valeurs approchées aux points $0, h, 2h, \dots$ forment une **suite géométrique** de raison $1+h$.

Euler avec $h = 0,2$

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Euler $(1,2)^n$	1	1,2	1,44	1,728	2,074	2,488
$\exp(x)$ (calculatrice)	1	1,221	1,492	1,822	2,226	2,718

Avec $h = 0,01$, on obtient $\exp(1) \approx 1,01^{100} \approx 2,705$: plus le pas est petit, meilleure est l'approximation.

Algorithme d'Euler

```
def euler(x, n):
    h = x / n
    y = 1
    for k in range(n):
        y = y * (1 + h)
    return y
```

`euler(1, 1000)` renvoie environ 2,717.

2. Propriétés algébriques

L'exponentielle ne s'annule pas

Pour tout réel x : $\exp(x) \exp(-x) = 1$. En particulier, $\exp(x) \neq 0$ et

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Démonstration. Soit $g(x) = \exp(x) \exp(-x)$. Avec la dérivée d'un produit, et la dérivée de $x \mapsto \exp(-x)$, qui est $x \mapsto -\exp(-x)$ (règle admise de la section 4, avec $a = -1$) :

$$g'(x) = \exp(x) \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp(-x)) = 0.$$

g est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à $g(0) = \exp(0)^2 = 1$. Si l'on avait $\exp(x) = 0$, le produit vaudrait 0, ce qui est impossible.

Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Démonstration. On fixe y et on pose $h(x) = \exp(x+y) \exp(-x)$. On admet que $x \mapsto \exp(x+y)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \exp(x+y)$. Alors $h'(x) = \exp(x+y) \exp(-x) - \exp(x+y) \exp(-x) = 0$: h est constante, égale à $h(0) = \exp(y)$. Donc $\exp(x+y) \exp(-x) = \exp(y)$; en multipliant par $\exp(x)$ et en utilisant $\exp(-x) \exp(x) = 1$, on obtient $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$.

Le nombre e et la notation e^x

On note $e = \exp(1) \approx 2,718$. Pour tout entier n , la relation fonctionnelle donne $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$; on étend cette notation à tous les réels :

$$\exp(x) = e^x.$$

Règles de calcul

Pour tous réels x, y et tout entier relatif n :

$$e^0 = 1 \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

Ce sont les règles des puissances.

Simplifier

- $\frac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^{2x+1}} = e^{3x-x-(2x+1)} = e^{-1}.$
- $(e^x)^3 \times e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x.$
- $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}.$

Une somme n'est pas un produit

$e^{x+y} = e^x e^y$, mais $e^x + e^y \neq e^{x+y}$: avec $x = y = 0$, $e^0 + e^0 = 2$ alors que $e^0 = 1$. De même, $e^{2x} \neq 2e^x$: c'est $(e^x)^2$.

3. Étude de la fonction exponentielle**Signe**

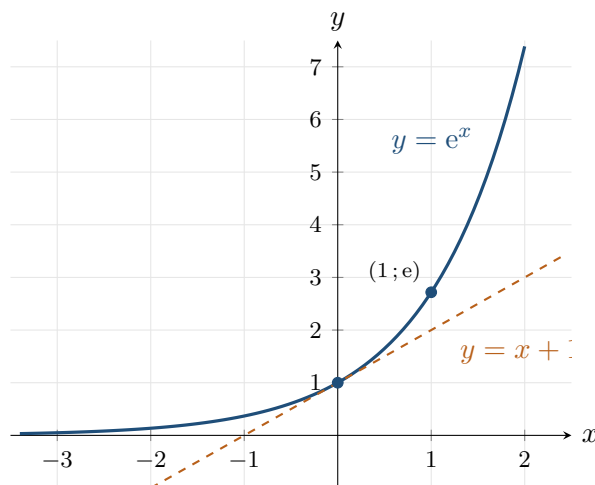
Pour tout réel x , $e^x > 0$.

Démonstration. $e^x = e^{x/2+x/2} = (e^{x/2})^2 \geq 0$, et $e^x \neq 0$: donc $e^x > 0$.

Sens de variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée $\exp' = \exp$ est strictement positive. Par conséquent, pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b \qquad e^a < e^b \iff a < b$$



Courbe de la fonction exponentielle et sa tangente au point d'abscisse 0.

Valeurs et tangente remarquables

$e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2,718$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$, soit $y = x + 1$. La courbe est au-dessus de cette tangente : pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

Inégalité $e^x \geq x + 1$. Soit $g(x) = e^x - x - 1$. Alors $g'(x) = e^x - 1$, négatif pour $x \leq 0$ et positif pour $x \geq 0$ (car l'exponentielle est croissante et $e^0 = 1$). Donc g admet un minimum en 0, égal à $g(0) = 0$: $g(x) \geq 0$ pour tout x .

Équations et inéquations

— $e^{2x+1} = e^{-x+7} \iff 2x + 1 = -x + 7 \iff x = 2$.

— $e^{x^2} = e^{4x-3} \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x - 1)(x - 3) = 0 : S = \{1; 3\}$.

- $e^{3x-2} \geq 1 \iff e^{3x-2} \geq e^0 \iff 3x-2 \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{3}$.
- $e^x = -2$ n'a pas de solution, car une exponentielle est strictement positive.

Lien avec les suites géométriques

Pour tout réel a , la suite (u_n) définie par $u_n = e^{na}$ est géométrique de raison $q = e^a$, car $u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na}e^a$. L'exponentielle prolonge à tous les réels une évolution géométrique : temps discret pour la suite, temps continu pour la fonction.

4. Fonctions $t \mapsto e^{at}$

Dérivée

Pour tout réel a , la fonction $f : t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(t) = a e^{at}$$

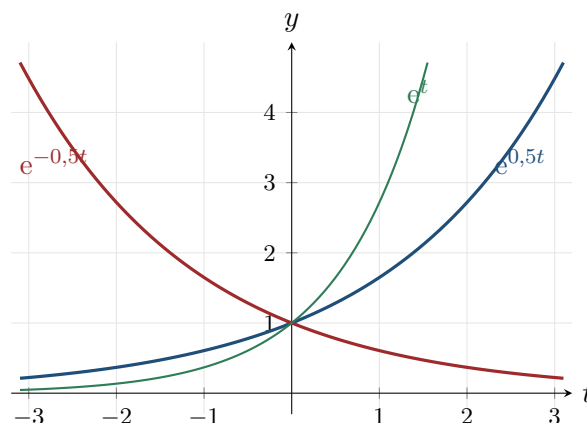
Pourquoi le facteur a ?

Cette propriété est admise en première (elle sera démontrée en terminale avec la dérivée d'une fonction composée). On la comprend avec le taux de variation : $\frac{e^{a(t+h)} - e^{at}}{h} = e^{at} \times a \times \frac{e^{ah} - 1}{ah}$, et quand h tend vers 0, $\frac{e^{ah} - 1}{ah}$ tend vers le nombre dérivé de $\exp$ en 0, c'est-à-dire $\exp(0) = 1$.

Variations

$e^{at} > 0$, donc $f'(t) = a e^{at}$ a le signe de a :

- si $a > 0$, $t \mapsto e^{at}$ est strictement croissante (croissance exponentielle) ;
- si $a < 0$, elle est strictement décroissante (décroissance exponentielle) ;
- si $a = 0$, elle est constante, égale à 1.



Les courbes de $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ; plus k est grand, plus la croissance est rapide.

Dériver

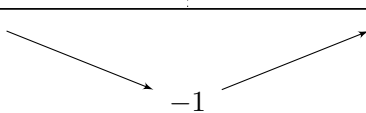
- $f(t) = 5e^{-0,2t}$: $f'(t) = 5 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -e^{-0,2t}$.
- $g(x) = xe^x$ (produit) : $g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x+1)e^x$.
- $h(x) = \frac{e^x}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$ (quotient) : $h'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

Étudier une fonction contenant e^x

On dérive, on factorise par l'exponentielle, puis on utilise $e^x > 0$: le signe de la dérivée est celui du facteur restant.

Étude de $f(x) = (x-1)e^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = xe^x$, du signe de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

f admet un minimum égal à $f(0) = -1$. Tangente au point d'abscisse 1 : $f(1) = 0$ et $f'(1) = e$, d'où $y = e(x-1)$.

5. Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle**Modèle exponentiel**

Une grandeur $N(t) = N_0 e^{at}$ vérifie $N'(t) = a N(t)$: sa vitesse de variation est proportionnelle à sa valeur. Elle est multipliée par le même nombre $e^{a\tau}$ sur toute durée τ : c'est la version continue d'une évolution à taux constant.

Décroissance radioactive

Une source contient $N(t) = 1\,000 e^{-0,1t}$ noyaux radioactifs (en milliards) au bout de t années.

- $N(0) = 1\,000$; $N(10) = 1\,000 e^{-1} \approx 368$: en 10 ans, il reste environ 37 % des noyaux.
- $N'(t) = -0,1 \times 1\,000 e^{-0,1t} = -0,1 N(t) < 0$: N est décroissante.
- À la calculatrice : $N(6) \approx 548,8$ et $N(7) \approx 496,6$. La moitié des noyaux a disparu entre 6 et 7 ans (demi-vie).

Capital à taux fixe

Un capital de 2 000 € placé « en continu » au taux annuel de 3 % vaut $C(t) = 2\,000 e^{0,03t}$ au bout de t années : $C(10) = 2\,000 e^{0,3} \approx 2\,699,72$ €. Avec des intérêts composés une fois par an, on aurait $2\,000 \times 1,03^{10} \approx 2\,687,83$ € : les deux modèles sont proches.

Valeur approchée de e

La suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (Euler avec $x = 1$ et $h = \frac{1}{n}$) donne 2,594 pour $n = 10$, 2,705 pour $n = 100$, 2,717 pour $n = 1\,000$: elle s'approche de $e \approx 2,718\,28$.

6. Erreurs classiques**À éviter**

- $e^{x+y} = e^x + e^y$: faux, c'est un **produit**.
- $e^{2x} = 2e^x$: faux, $e^{2x} = (e^x)^2$.
- Oublier le facteur a en dérivant e^{at} : $(e^{-3t})' = -3e^{-3t}$.
- Chercher le signe de e^x : il est toujours strictement positif ; seul le facteur restant compte.
- Croire que $e^x = 0$ ou $e^x < 0$ peut avoir des solutions.

7. Fiche de synthèse

Définition	unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = f$ et $f(0) = 1$
Relation	$e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^n = e^{nx}$
Valeurs	$e^0 = 1$; $e = e^1 \approx 2,718$
Signe, variations	$e^x > 0$; strictement croissante ; $e^a < e^b \iff a < b$
Tangente en 0	$y = x + 1$; $e^x \geq x + 1$
Dérivées	$(e^x)' = e^x$; $(e^{at})' = a e^{at}$
Suites	$u_n = e^{na}$ géométrique de raison e^a
Modèle	$N(t) = N_0 e^{at}$: croissance si $a > 0$, décroissance si $a < 0$

8. Exercices d'application**Exercice 1 – Calculs**

Écrire sous la forme $e^{\dots}$: a) $e^5 \times e^{-2}$; b) $\frac{e^{x+3}}{e^{x-1}}$; c) $(e^{-x})^2 \times e^{3x}$.

Exercice 2 – Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^{3x-1} = e^{x+5}$; b) $e^{-x} < e$; c) $e^{x^2-1} = 1$.

Exercice 3 – Dérivées

Calculer la dérivée de : a) $f(x) = 3e^x - x^2$; b) $g(t) = 4e^{0,5t}$; c) $h(x) = (2x + 1)e^x$.

Exercice 4 – Étude de fonction

Soit $f(x) = (2 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f . Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 5 – Refroidissement

La température d'un café (en °C) est modélisée par $T(t) = 20 + 60e^{-0,05t}$, où t est en minutes.

1. Calculer $T(0)$ et $T(10)$ (au dixième).
2. Étudier le sens de variation de T .
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de minutes entières le café passe sous 50 °C.

9. Corrigés des exercices**Corrigé de l'exercice 1**

Corrigé. a) $e^{5-2} = e^3$. b) $e^{(x+3)-(x-1)} = e^4$. c) $e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. a) $3x - 1 = x + 5 \iff x = 3 : S = \{3\}$. b) $e^{-x} < e^1 \iff -x < 1 \iff x > -1 : S =]-1 ; +\infty[$. c) $e^{x^2-1} = e^0 \iff x^2 = 1 : S = \{-1 ; 1\}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. a) $f'(x) = 3e^x - 2x$. b) $g'(t) = 4 \times 0,5e^{0,5t} = 2e^{0,5t}$. c) Produit : $h'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$, du signe de $1 - x$ car $e^x > 0$: positive avant 1, négative après. f est croissante sur $] -\infty ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$, de maximum $f(1) = e \approx 2,72$. Tangente en 0 : $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$, d'où $y = x + 2$.

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé. 1. $T(0) = 20 + 60 = 80$ °C ; $T(10) = 20 + 60e^{-0,5} \approx 56,4$ °C. 2. $T'(t) = 60 \times (-0,05)e^{-0,05t} = -3e^{-0,05t} < 0$: T est strictement décroissante. 3. $T(13) \approx 51,3$ et $T(14) \approx 49,8$: le café passe sous 50 °C au bout de 14 minutes.