

Plaquette 2 - Droites et cercles

Géométrie repérée — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Droite. Équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Si $b \neq 0$, l'équation réduite s'écrit $y = mx + p$ avec

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r : c'est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$, d'où

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Forme développée. Une équation du type $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ se ramène à la forme précédente en écrivant **deux formes canoniques**, une en x et une en y :

$$x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$$

Le second membre obtenu est alors r^2 : s'il est **négatif**, il n'y a aucun point ; s'il est **nul**, un seul point.

Cercle de diamètre $[AB]$: centre au milieu de $[AB]$, rayon $\frac{AB}{2}$; caractérisé par $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Tangente à un cercle en un point T : droite passant par T et **perpendiculaire** au rayon $[\Omega T]$; elle admet donc $\vec{\Omega T}$ pour vecteur normal.

Intersections. Droite et cercle : on **substitue** l'expression de y (ou de x) tirée de l'équation de la droite dans celle du cercle ; le discriminant donne alors 2, 1 ou 0 point.

Correction de l'exercice 1 - L'équation d'une droite par deux points

Vecteur directeur : $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Un vecteur **normal** s'en déduit en échangeant les coordonnées et en changeant un signe : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- **Équation** : de la forme $x + y + c = 0$. Le point $A(1; 3)$ donne $1 + 3 + c = 0$, donc $c = -4$.

$$(AB): x + y - 4 = 0$$

- **Équation réduite** : on isole y .

$$y = -x + 4$$

- **Vérifications** : A donne $-1 + 4 = 3$ ✓ et B donne $-5 + 4 = -1$ ✓

Contrôle par le coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{5 - 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

ce qui correspond bien à $y = -x + 4$ ✓

Réponse. $x + y - 4 = 0$, soit $y = -x + 4$.

Correction de l'exercice 2 - Appartenance et vecteur directeur

- a) On remplace les coordonnées dans l'équation.
- Pour $A(0; 3)$: $0 - 6 + 6 = 0$ ✓ Le point A appartient à d .
- Pour $B(2; 5)$: $6 - 10 + 6 = 2 \neq 0$. Le point B n'appartient **pas** à d .
- b) Dans $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Le coefficient directeur est le quotient des coordonnées du vecteur directeur :

$$m = \frac{3}{2} = 1,5$$

- **Contrôle** : l'équation réduite s'écrit $y = \frac{3x+6}{2} = 1,5x + 3$ ✓ — on y lit aussi l'ordonnée à l'origine 3, cohérente avec l'appartenance de $A(0; 3)$.

Erreur à éviter. Le vecteur directeur n'est pas $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$: celui-ci est le vecteur **normal**.

Réponse. a) A oui, B non — b) $\vec{u}(2; 3)$ et $m = 1,5$.

Correction de l'exercice 3 - Une parallèle passant par un point

L'idée. Deux droites parallèles ont le **même vecteur normal** : l'équation de d' a donc les mêmes coefficients a et b , seule la constante change.

$$d': 2x + 5y + c = 0$$

- **On détermine** c avec le point $C(4; -1)$:

$$2 \times 4 + 5 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow 3 + c = 0$$

- Donc $c = -3$.

$$d': 2x + 5y - 3 = 0$$

- **Surprise** : on retrouve exactement l'équation de d ! Cela signifie que le point C **appartient** à d : la parallèle passant par C est donc d elle-même.
- **Vérification** : $2 \times 4 + 5 \times (-1) - 3 = 8 - 5 - 3 = 0$ ✓

Ce que l'exercice enseigne. Avant de conclure, on **teste** toujours si le point donné appartient déjà à la droite : sinon on annonce une « parallèle » qui est la droite de départ.

Réponse. C appartient à d : la parallèle cherchée est d elle-même, $2x + 5y - 3 = 0$.

Correction de l'exercice 4 - Intersection de deux droites

Méthode : résoudre le système.

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases}$$

- De la première équation : $y = 2x - 1$. On **substitue** dans la seconde :

$$x + 3(2x - 1) - 11 = 0 \Leftrightarrow x + 6x - 3 - 11 = 0 \Leftrightarrow 7x = 14$$

- Donc $x = 2$, puis $y = 2 \times 2 - 1 = 3$.

Le point d'intersection est $I(2; 3)$.

— **Vérification dans les deux équations** : $4 - 3 - 1 = 0 \checkmark$ et $2 + 9 - 11 = 0 \checkmark$

Avant de calculer, un réflexe. On vérifie que les droites ne sont pas parallèles : leurs vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ($6 + 1 = 7 \neq 0$), donc l'intersection existe et est unique.

Réponse. $I(2; 3)$.

Correction de l'exercice 5 - L'équation d'un cercle

Forme canonique. Un point $M(x; y)$ appartient au cercle si et seulement si $OM = 5$, c'est-à-dire $OM^2 = 25$:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

— **Attention au signe** : le centre a pour ordonnée -2 , donc on écrit $(y - (-2))^2 = (y + 2)^2$.

Forme développée. On développe les deux carrés :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 25$$

— soit, en regroupant :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

— **Vérification avec un point** : le point $(8; -2)$, situé à 5 unités à droite du centre, donne $64 + 4 - 48 - 8 - 12 = 0 \checkmark$

Les deux formes, deux usages. La forme canonique **se lit** (centre et rayon immédiats) ; la forme développée sert aux **calculs d'intersection**.

Réponse. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$, soit $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Correction de l'exercice 6 - Lire le centre et le rayon

On compare à la forme de référence :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{centre } \Omega(a; b), \text{ rayon } r$$

a) $\Omega(1; 4)$ et $r = \sqrt{9} = 3$.

b) $(x + 5)^2 = (x - (-5))^2$, donc $\Omega(-5; 0)$ et $r = \sqrt{7} \approx 2,65$.

c) $\Omega(0; -3)$ et $r = 1$.

Les deux pièges.

— Le **signe** : $(x + 5)^2$ correspond à une abscisse de centre égale à -5 , pas à 5.

— Le **rayon** : le second membre vaut r^2 , pas r . En b), le rayon est $\sqrt{7}$ et non 7.

Contrôle rapide. Le point $(1; 7)$ appartient-il au cercle a) ? $0 + 9 = 9 \checkmark$: il est bien sur le cercle, à 3 unités au-dessus du centre.

Réponse. a) $\Omega(1; 4)$, $r = 3$ — b) $\Omega(-5; 0)$, $r = \sqrt{7}$ — c) $\Omega(0; -3)$, $r = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Reconnaître un cercle développé

Méthode : deux formes canoniques, une pour x , une pour y .

— **En x** : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.

— **En y** : $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$.

— On remplace dans l'équation :

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$$

— On isole :

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Conclusion. C'est le cercle de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon $r = 4$.

— **Vérification** : le point $(6; -3)$ donne $36 + 9 - 24 - 18 - 3 = 0$ ✓ et il est bien à 4 unités du centre.

La règle du « moitié puis carré ». Pour $x^2 + \alpha x$, on prend la **moitié** de α , on la met dans la parenthèse, et on **retranche son carré**. Ici $\alpha = -4$, donc moitié -2 , et on retranche 4.

Réponse. Cercle de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon 4.

Correction de l'exercice 8 - Quand ce n'est pas un cercle

On applique la même méthode que pour un cercle.

— **En x** : $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$.

— **En y** : $y^2 + 8y = (y + 4)^2 - 16$.

— L'équation devient :

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = -3$$

Conclusion. Une somme de deux carrés est toujours **positive ou nulle** : elle ne peut pas valoir -3 . L'ensemble cherché est donc **vide**.

Les trois cas possibles. Après réduction, le second membre k décide :

Valeur de k	$k > 0$	$k = 0$	$k < 0$
Ensemble	cercle de rayon $\sqrt{k}$	un seul point (le centre)	ensemble vide

Ce qu'il ne faut pas faire. Écrire « rayon = $\sqrt{-3}$ » : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$, et la bonne réponse est « aucun point ».

Réponse. L'ensemble est vide : on obtient $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = -3$.

Correction de l'exercice 9 - Le cercle de diamètre donné

Centre : c'est le milieu de $[AB]$.

$$\Omega\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = \Omega(2; 4)$$

Rayon : c'est la moitié du diamètre.

— $AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, donc $r = \sqrt{13}$.

— **Équation** :

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$$

— **Vérification avec A** : $(-3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$ ✓

— **Vérification avec B** : $3^2 + 2^2 = 13$ ✓

Autre méthode, par le produit scalaire. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, soit

$$(-1 - x)(5 - x) + (2 - y)(6 - y) = 0$$

qui se développe en $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$ — la même équation, sous forme développée.

Réponse. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$.

Correction de l'exercice 10 - Un point est-il sur le cercle ?

On calcule à chaque fois ΩM^2 , avec $\Omega(1; -2)$, et on compare à $r^2 = 25$.

- a) $\Omega A^2 = (4 - 1)^2 + (2 + 2)^2 = 9 + 16 = 25$. Égal à r^2 : le point A est **sur** le cercle.
- b) $\Omega B^2 = 0 + (1 + 2)^2 = 9 < 25$: le point B est **à l'intérieur** du disque.
- c) $\Omega C^2 = 36 + 25 = 61 > 25$: le point C est **à l'extérieur**.

La règle générale, pour un cercle de centre Ω et de rayon r :

$$\Omega M < r : \text{intérieur} \quad \Omega M = r : \text{sur le cercle} \quad \Omega M > r : \text{extérieur}$$

Astuce de calcul. On compare toujours les **carrés** : cela évite les racines carrées et les arrondis.

Réponse. a) sur le cercle — b) intérieur — c) extérieur.

Correction de l'exercice 11 - Intersection d'une droite et d'un cercle

Méthode : substitution. On remplace y par $x + 1$ dans l'équation du cercle.

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

- **Développement** : $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$, soit $2x^2 + 2x - 24 = 0$.
- On divise par 2 : $x^2 + x - 12 = 0$.
- **Discriminant** : $\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 7$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$.
- **Ordonnées** : $y = x + 1$ donne -3 et 4 .

Les points d'intersection sont $M(-4; -3)$ et $N(3; 4)$.

- **Vérification** : $16 + 9 = 25 \checkmark$ et $9 + 16 = 25 \checkmark$

Ce que le discriminant raconte. $\Delta > 0$: la droite est **sécante** (deux points) ; $\Delta = 0$: elle est **tangente** ; $\Delta < 0$: elle ne coupe pas le cercle.

Réponse. $M(-4; -3)$ et $N(3; 4)$.

Correction de l'exercice 12 - La tangente au cercle

a) **Rayon** :

$$r = \Omega T = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

- b) **Propriété clé** : la tangente en T est **perpendiculaire** au rayon $[\Omega T]$. Elle admet donc $\overrightarrow{\Omega T} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour vecteur **normal**.
- Son équation est de la forme $3x + 4y + c = 0$; le point $T(5; 5)$ donne $15 + 20 + c = 0 \Leftrightarrow c = -35$
 $3x + 4y - 35 = 0$

- **Vérification** : T donne $15 + 20 - 35 = 0 \checkmark$
- **Contrôle de la tangence** : le centre Ω donne $6 + 4 - 35 = -25 \neq 0$, donc Ω n'est pas sur la droite — cohérent, la tangente ne passe pas par le centre.

La recette. Tangente en un point d'un cercle : vecteur normal = $\overrightarrow{\Omega T}$, et on passe par T .
Aucun discriminant n'est nécessaire.

Réponse. a) $r = 5$ — b) $3x + 4y - 35 = 0$.

Correction de l'exercice 13 - Droite tangente ou sécante ?

On cherche les points communs par **substitution** :

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$$

— **Développement** : $x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 10$, soit $10x^2 - 60x + 90 = 0$.

— On divise par 10 : $x^2 - 6x + 9 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 36 - 36 = 0$.

Conclusion. Le discriminant est **nul** : il y a un seul point commun, la droite est **tangente** au cercle.

— **Point de contact** : $x = \frac{6}{2} = 3$, puis $y = 3 \times 3 - 10 = -1$. Le point est $T(3; -1)$.

— **Vérification** : $9 + 1 = 10$ ✓ — T est bien sur le cercle.

— **Contrôle de la perpendicularité** : $\overrightarrow{\Omega T} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le vecteur directeur de d , $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, vérifient $3 - 3 = 0$ ✓ Le rayon est bien perpendiculaire à la droite.

On retrouve $(x - 3)^2 = 0$: la racine double est la signature algébrique de la tangence.

Réponse. Tangente, au point $T(3; -1)$.

Correction de l'exercice 14 - La zone de couverture

a) On compare ΩV au rayon :

$$\Omega V^2 = (12 - 4)^2 + (8 - 3)^2 = 64 + 25 = 89$$

— Or $r^2 = 100 > 89$: la ville est **à l'intérieur** du disque, donc couverte. ($\Omega V = \sqrt{89} \approx 9,4$ km.)

— b) Le cercle a pour équation $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 100$. On **substitue** $y = 2x - 9$:

$$(x - 4)^2 + (2x - 12)^2 = 100$$

— **Développement** : $x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 48x + 144 = 100$, soit $5x^2 - 56x + 60 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 3136 - 1200 = 1936$, et $\sqrt{1936} = 44$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{56 - 44}{10} = 1,2$ et $x_2 = \frac{56 + 44}{10} = 10$.

— **Ordonnées** : $y = 2x - 9$ donne $-6,6$ et 11 .

La route entre dans la zone en $(1,2; -6,6)$ et en sort en $(10; 11)$.

— **Contrôle** : $(10 - 4)^2 + (11 - 3)^2 = 36 + 64 = 100$ ✓

Réponse. a) oui ($\Omega V \approx 9,4 < 10$) — b) $(1,2; -6,6)$ et $(10; 11)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : cercle, corde et tangente

a) **Formes canoniques** : $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ et $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$, donc

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

— Centre $\Omega(1; 2)$, rayon 5.

— b) **Test** : $(6 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 25 + 4 = 29 \neq 25$.

— Le point A **n'appartient pas** au cercle : il est à l'extérieur, puisque $29 > 25$. Il n'y a donc pas de tangente « en A ».

— c) Les points de l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0 :

$$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 25 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 21$$

— Donc $x - 1 = \pm\sqrt{21}$, soit

$$x = 1 - \sqrt{21} \approx -3,58 \quad \text{ou} \quad x = 1 + \sqrt{21} \approx 5,58$$

— Les points cherchés sont $(1 - \sqrt{21} ; 0)$ et $(1 + \sqrt{21} ; 0)$.

La leçon du b). Avant d'appliquer une méthode, on **vérifie les hypothèses** : ici, le point annoncé n'était pas sur le cercle, et le signaler fait partie de la réponse.

Réponse. a) $\Omega(1 ; 2)$, $r = 5$ — b) A n'est pas sur C — c) $(1 \pm \sqrt{21} ; 0)$.