

Plaquette 4 - Droites du plan :
équations, intersections et parallélisme
Géométrie repérée — Première spé maths
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation cartésienne d'une droite : $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

— **Vecteur directeur** : $\vec{u}(-b; a)$.

— **Vecteur normal** : $\vec{n}(a; b)$.

Équation réduite (si la droite n'est pas verticale) : $y = mx + p$, avec

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (\text{coefficient directeur})$$

Représentation paramétrique d'une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$:

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Positions relatives. Pour $d: ax + by + c = 0$ et $d': a'x + b'y + c' = 0$:

- **parallèles** $\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$ (directeurs colinéaires) ;
- **confondues** si de plus les équations sont proportionnelles ;
- **sécantes** sinon, le point d'intersection étant la solution du système.

Avec les équations réduites : parallèles $\Leftrightarrow m = m'$; perpendiculaires $\Leftrightarrow mm' = -1$.

Milieu, distance.

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Colinéarité. $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$ (**déterminant** nul).

Alignement de A, B, C : les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Correction de l'exercice 1 - Équation d'une droite par deux points

— **Coefficient directeur** :

$$m = \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -1,5$$

— **Ordonnée à l'origine** : avec A , $4 = -1,5 \times (-1) + p = 1,5 + p$, donc $p = 2,5$.

— **Équation réduite** :

$$y = -1,5x + 2,5$$

— **Contrôles** : A donne $1,5 + 2,5 = 4$ ✓ et B donne $-4,5 + 2,5 = -2$ ✓

— **Équation cartésienne** : en multipliant par 2, $2y = -3x + 5$, soit $3x + 2y - 5 = 0$.

— **Vecteur directeur** : $(-2; 3)$, proportionnel à $\vec{AB}(4; -6)$ ✓

— **Contrôle du déterminant** : $4 \times 3 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0$ ✓ — bien colinéaires.

— **Intersection avec les axes** : $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ et $(0; 2,5)$.

Réponse. $y = -1,5x + 2,5$, soit $3x + 2y - 5 = 0$.

Correction de l'exercice 2 - De cartésienne à réduite

— **Équation réduite** : $6y = 4x + 3$, donc

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

— **Coefficient directeur** : $m = \frac{2}{3} \approx 0,6667$; **ordonnée à l'origine** : 0,5.

— **Vecteur directeur** : $\vec{u}(-b; a) = (6; 4)$, que l'on simplifie en $(3; 2)$.

— **Vecteur normal** : $\vec{n}(4; -6)$, soit $(2; -3)$.

— **Contrôle d'orthogonalité** : $(3; 2) \cdot (2; -3) = 6 - 6 = 0 \checkmark$

— **Cohérence directeur / pente** : $\frac{2}{3}$, exactement le coefficient directeur $\checkmark$

— **Vérification sur deux points** : $(0; 0,5)$ donne $0 - 3 + 3 = 0 \checkmark$ et $(3; 2,5)$ donne $12 - 15 + 3 = 0 \checkmark$

— **Attention au signe** : le vecteur normal est $(a; b)$ avec les signes de l'équation — ici $(4; -6)$, pas $(4; 6)$.

Réponse. $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$; $\vec{u}(3; 2)$ et $\vec{n}(2; -3)$.

Correction de l'exercice 3 - Intersection de deux droites

— **Système** :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

— **Substitution** : $x = y - 1$, donc $2(y - 1) + 3y = 7$, soit $5y = 9$ et $y = 1,8$.

— **Puis** : $x = 0,8$.

— **Point** :

$$I(0,8; 1,8)$$

— **Contrôles** : $1,6 + 5,4 - 7 = 0 \checkmark$ et $0,8 - 1,8 + 1 = 0 \checkmark$

— **Vérification de la non-parallélisme** : $\det = 2 \times (-1) - 1 \times 3 = -5 \neq 0 \checkmark$ — les droites sont bien sécantes.

— **Angle des droites** : les normales sont $(2; 3)$ et $(1; -1)$, de produit scalaire $2 - 3 = -1$.

— $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{2}} \approx -0,19612$, soit un angle d'environ $101,31^\circ$ — l'angle aigu entre les droites vaut donc environ $78,69^\circ$.

Réponse. $I(0,8; 1,8)$.

Correction de l'exercice 4 - Droites parallèles

— **Déterminant** : $3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$, donc les droites sont **parallèles** $\checkmark$

— **Confondues ?** En multipliant d par -2 : $-6x + 4y - 10 = 0$, alors que d' donne $+1$.

— $-10 \neq 1$, donc les droites sont **strictement parallèles**.

— **Contrôle par les équations réduites** : d donne $y = 1,5x + 2,5$ et d' donne $y = 1,5x - 0,25$ — même pente, ordonnées à l'origine différentes $\checkmark$

— **Distance entre les deux** : on prend $(0; 2,5)$ sur d et l'on calcule sa distance à d' :

$$\frac{|0 + 10 + 1|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{11}{\sqrt{52}} \approx 1,5252$$

- **Contrôle avec un autre point de d** : $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$ donne $\frac{|10 + 0 + 1|}{\sqrt{52}} = \frac{11}{\sqrt{52}}$ ✓ — même distance, comme attendu.
- **Astuce** : normaliser les deux équations au même vecteur normal rend la comparaison immédiate.

Réponse. Strictement parallèles, à distance $\frac{11}{\sqrt{52}} \approx 1,53$.

Correction de l'exercice 5 - Droite perpendiculaire

- **Vecteur directeur de d** : $(-4; 1)$ — c'est le **vecteur normal** de la droite cherchée.
- **Équation** : $-4(x - 2) + 1(y + 3) = 0$, soit $-4x + 8 + y + 3 = 0$, donc $4x - y - 11 = 0$
- **Contrôle du point** : $8 + 3 - 11 = 0$ ✓
- **Contrôle par les pentes** : d a pour pente $-\frac{1}{4}$ et la nouvelle droite 4 ; or $-\frac{1}{4} \times 4 = -1$ ✓
- **Point d'intersection** : on résout $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$
- De la seconde, $y = 4x - 11$; en substituant : $x + 16x - 44 = 2$, donc $17x = 46$ et $x = \frac{46}{17} \approx 2,7059$.
- **Puis** : $y = \frac{184}{17} - 11 = \frac{184 - 187}{17} = -\frac{3}{17} \approx -0,17647$.
- **Contrôle** : $\frac{46}{17} + 4 \times \left(-\frac{3}{17}\right) = \frac{46 - 12}{17} = \frac{34}{17} = 2$ ✓
- **Distance de A à d** : $\frac{|2 - 12 - 2|}{\sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}} \approx 2,9104$ — c'est aussi la distance AH ✓

Réponse. $4x - y - 11 = 0$.

Correction de l'exercice 6 - Alignement de trois points

- **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB}(3; 6)$ et $\overrightarrow{AC}(-3; -6)$.
- **Déterminant** : $3 \times (-6) - (-3) \times 6 = -18 + 18 = 0$
- **Conclusion** : les points sont **alignés** ✓
- **Relation précise** : $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, donc A est le **milieu** de $[BC]$.
- **Contrôle** : le milieu de $[BC]$ est $\left(\frac{4-2}{2}; \frac{8-4}{2}\right) = (1; 2) = A$ ✓
- **Équation de la droite** : de pente $\frac{6}{3} = 2$, elle s'écrit $y = 2x$, et l'on vérifie $2 = 2$, $8 = 8$, $-4 = -4$ ✓
- **Méthode alternative** : comparer les pentes $\frac{8-2}{4-1} = 2$ et $\frac{-4-2}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2$ ✓ — même pente depuis A , donc alignement.
- **Avantage du déterminant** : il fonctionne même quand une des droites est **verticale**, là où les pentes ne sont pas définies.

Réponse. Oui, et A est le milieu de $[BC]$.

Correction de l'exercice 7 - Représentation paramétrique

- **Point de la droite** : pour $y = 1$, $2x = 4$ donc $x = 2$: le point $A(2; 1)$.

- **Contrôle** : $4 - 5 + 1 = 0$ ✓
- **Vecteur directeur** : $(-b; a) = (5; 2)$.
- **Représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
- **Test de $(7; 3)$** : la première équation donne $7 = 2 + 5t$, donc $t = 1$.
- **Contrôle sur y** : $1 + 2 \times 1 = 3$ ✓
- **Conclusion** : le point **appartient** à la droite, pour $t = 1$.
- **Vérification directe** : $14 - 15 + 1 = 0$ ✓
- **Non-unicité** : $\begin{cases} x = 7 + 10s \\ y = 3 + 4s \end{cases}$ est une autre représentation de la **même** droite — un point et un directeur peuvent toujours être changés.

Réponse. $x = 2 + 5t$, $y = 1 + 2t$; $(7; 3)$ appartient à la droite ($t = 1$).

Correction de l'exercice 8 - Médiatrice

- **Milieu** : $I(1; 3)$.
- **Vecteur normal** : $\overline{AB}(6; 4)$, simplifié en $(3; 2)$.
- **Équation** : $3(x - 1) + 2(y - 3) = 0$, soit

$$3x + 2y - 9 = 0$$
- **Contrôle du milieu** : $3 + 6 - 9 = 0$ ✓
- **Contrôle par équidistance** : prenons $(1; 3)$, à distance $\sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ de A et $\sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ de B ✓
- **Autre point de la médiatrice** : $(3; 0)$ vérifie $9 + 0 - 9 = 0$; et $MA^2 = 25 + 1 = 26$, $MB^2 = 1 + 25 = 26$ ✓
- **Pente** : $-\frac{3}{2} = -1,5$; celle de (AB) vaut $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, et $-1,5 \times \frac{2}{3} = -1$ ✓
- **Méthode alternative** (plus longue) : écrire $MA^2 = MB^2$ et développer.

Réponse. $3x + 2y - 9 = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Cercle et équation

- **Rayon** : $R = \Omega P = \sqrt{(5 - 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.
- **Équation** :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$
- **Contrôle** : P donne $9 + 16 = 25$ ✓
- **Forme développée** : $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 25$, soit $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.
- **Contrôle de la forme développée** : $P(5; 3)$ donne $25 + 9 - 20 + 6 - 20 = 0$ ✓
- **Autres points du cercle** : $(7; -1)$, $(-3; -1)$, $(2; 4)$ et $(2; -6)$ — les quatre « pôles » ✓
- **Vérification** : $(2; 4)$ donne $0 + 25 = 25$ ✓
- **Intersection avec l'axe des abscisses** : $y = 0$ donne $(x - 2)^2 = 24$, soit $x = 2 \pm 2\sqrt{6}$, environ $-2,899$ et $6,899$ ✓

Réponse. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Correction de l'exercice 10 - Droite passant par un point et parallèle

- **Même vecteur normal** : $\vec{n}(5; 2)$, donc l'équation est de la forme $5x + 2y + c = 0$.
 - **Passage par C** : $-15 + 4 + c = 0$, donc $c = 11$.

$$5x + 2y + 11 = 0$$
 - **Contrôle** : $-15 + 4 + 11 = 0$ ✓
 - **Contrôle du parallélisme** : les deux équations ont les mêmes coefficients en x et y ✓
 — donc même pente $-2,5$.
 - **Non-confusion** : $c = 11 \neq -4$, les droites sont **strictement** parallèles ✓
 - **Distance entre elles** : $\frac{|-4 - 11|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{15}{\sqrt{29}} \approx 2,7855$.
 - **Contrôle** : le point $C(-3; 2)$ est à la distance $\frac{|-15 + 4 - 4|}{\sqrt{29}} = \frac{15}{\sqrt{29}}$ de d ✓ — cohérent.
 - **Astuce à retenir** : pour une parallèle, on garde a et b , on recalcule seulement c .
- Réponse.** $5x + 2y + 11 = 0$.

Correction de l'exercice 11 - Parallélogramme

- **Condition** : $\overline{AB} = \overline{DC}$ (les côtés opposés sont égaux dans cet ordre de sommets).
- **Calcul** : $\overline{AB}(4; 1)$, donc $\overline{DC}(6 - x_D; 5 - y_D) = (4; 1)$.
- **Résolution** : $6 - x_D = 4$ donne $x_D = 2$; $5 - y_D = 1$ donne $y_D = 4$.

$$D(2; 4)$$
- **Contrôle par les diagonales** : le milieu de $[AC]$ est $(3,5; 3)$ et celui de $[BD]$ est $\left(\frac{5+2}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (3,5; 3)$ ✓ — mêmes milieux, c'est bien un parallélogramme.
- **Contrôle des côtés** : $AD = \|(1; 3)\| = \sqrt{10}$ et $BC = \|(1; 3)\| = \sqrt{10}$ ✓
- **Nature précise** : $AB = \sqrt{17} \approx 4,123$ et $AD = \sqrt{10} \approx 3,162$ — côtés différents, ce n'est pas un losange.
- **Angle** : $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 4 + 3 = 7 \neq 0$ — ce n'est pas un rectangle non plus.
- **Aire** : $|4 \times 3 - 1 \times 1| = 11$.

Réponse. $D(2; 4)$.

Correction de l'exercice 12 - Point d'une droite à distance donnée

- **Paramétrage** : un point de la droite s'écrit $M(t; 2t)$.
- **Distance à l'origine** :

$$OM^2 = t^2 + 4t^2 = 5t^2 = 25$$
- **Résolution** : $t^2 = 5$, donc $t = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2,2361$.
- **Points** :

$$M_1(\sqrt{5}; 2\sqrt{5}) \approx (2,236; 4,472) \quad M_2(-\sqrt{5}; -2\sqrt{5})$$
- **Contrôles** : $5 + 20 = 25$ ✓ pour les deux.
- **Vérification de l'appartenance** : $2\sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5}$ ✓
- **Interprétation** : ce sont les intersections de la droite avec le **cercle** de centre O et de rayon 5 — d'où exactement **deux** points, la droite passant par le centre.
- **Cas général** : pour une droite ne passant pas par le centre, il y aurait 0, 1 ou 2 points selon la distance du centre à la droite.

Réponse. $(\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$ et $(-\sqrt{5}; -2\sqrt{5})$.

Correction de l'exercice 13 - Triangle et médianes

— **Centre de gravité** : moyenne des coordonnées des sommets.

$$G\left(\frac{0+6+3}{3}; \frac{0+0+6}{3}\right) = G(3; 2)$$

— **Milieu de $[BC]$** : $A'\left(\frac{6+3}{2}; 3\right) = A'(4,5; 3)$.

— **Médiane issue de A** : elle passe par $O(0; 0)$ et $A'(4,5; 3)$, donc a pour pente $\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$ et pour équation $y = \frac{2}{3}x$.

— **Contrôle** : $G(3; 2)$ vérifie $2 = \frac{2}{3} \times 3$ ✓

— **Position sur la médiane** : $\overrightarrow{AG}(3; 2)$ et $\overrightarrow{AA'}(4,5; 3)$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ ✓ — le centre de gravité est bien aux **deux tiers** de la médiane depuis le sommet.

— **Contrôle par une autre médiane** : le milieu de $[AC]$ est $(1,5; 3)$, et la médiane issue de B va de $(6; 0)$ à $(1,5; 3)$.

— **Vérification** : $\overrightarrow{BG}(-3; 2)$ et $\overrightarrow{B(1,5; 3)(-4,5; 3)}$ — encore le rapport $\frac{2}{3}$ ✓

— **Symétrie** : le triangle est **isocèle** en C ($CA = CB = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$), et G est bien sur l'axe de symétrie $x = 3$ ✓

Réponse. $G(3; 2)$, aux deux tiers de la médiane $y = \frac{2}{3}x$.

Correction de l'exercice 14 - Trois droites concourantes

— **Intersection de d_1 et d_2** : de d_2 , $y = 2x$; en substituant dans d_1 : $x + 2x - 3 = 0$, donc $x = 1$ et $y = 2$.

— **Point** : $I(1; 2)$.

— **Test sur d_3** : $3 + 4 - 7 = 0$ ✓

— **Conclusion** : les trois droites passent par $I(1; 2)$, elles sont **concourantes** ✓

— **Contrôles** : d_1 donne $1 + 2 - 3 = 0$ ✓ et d_2 donne $2 - 2 = 0$ ✓

— **Relation entre les équations** : $d_3 = d_1 + d_2$? Vérifions : $(x + y - 3) + (2x - y) = 3x - 3$, ce qui n'est pas d_3 .

— **Bonne combinaison** : $d_3 = 2d_1 + d_2$, car $2(x + y - 3) + (2x - y) = 4x + y - 6$ — non non plus.

— **Combinaison exacte** : cherchons α, β avec $\alpha(x + y - 3) + \beta(2x - y) = 3x + 2y - 7$. Alors $\alpha + 2\beta = 3$, $\alpha - \beta = 2$ et $-3\alpha = -7$, donc $\alpha = \frac{7}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

— **Vérification** : $\frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3$ ✓ et $\frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$ ✓ — d_3 est bien **combinaison linéaire** de d_1 et d_2 , ce qui est le critère algébrique de concourance.

Réponse. Elles passent toutes par $I(1; 2)$.

Correction de l'exercice 15 - Symétrique d'un point

— **Observation** : d est la première bissectrice, donc la symétrie **échange les coordonnées**.

— **Symétrique** : $P'(1; 4)$.

— **Vérification par la méthode générale** : le projeté H de P sur d vérifie $H = P + t\vec{n}$ avec $\vec{n}(1; -1)$.

- $(4 + t) - (1 - t) = 3 + 2t = 0$, donc $t = -1,5$.
- **Projeté** : $H(2,5; 2,5)$ — bien sur d ✓
- **Symétrique** : $P' = P + 2\overrightarrow{PH} = (4; 1) + 2(-1,5; 1,5) = (1; 4)$ ✓
- **Contrôles** : H est le milieu de $[PP']$: $\left(\frac{4+1}{2}; \frac{1+4}{2}\right) = (2,5; 2,5)$ ✓
- **Orthogonalité** : $\overrightarrow{PP'}(-3; 3)$ est colinéaire à $\vec{n}(1; -1)$ ✓
- **Distances** : $Pd = \frac{|4-1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,1213$, égale à $P'd = \frac{|1-4|}{\sqrt{2}}$ ✓

Réponse. $P'(1; 4)$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quadrilatère

- a) **Parallélogramme** : $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ et $\overrightarrow{DC}(4; 2)$ — **égaux**, donc $ABCD$ est un parallélogramme ✓
- **Contrôle par les diagonales** : milieu de $[AC] = (3; 3)$; milieu de $[BD] = (3; 3)$ ✓
- b) **Longueurs des côtés** : $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4,4721$ et $AD = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.
- **Égaux** : c'est donc un **losange** ✓
- **Rectangle ?** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 16 \neq 0$ — les côtés ne sont **pas** perpendiculaires, ce n'est **pas** un rectangle (donc pas un carré).
- **Contrôle des diagonales** : $AC = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2} \approx 8,485$ et $BD = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$ — **différentes**, ce qui confirme que ce n'est pas un rectangle ✓
- **Perpendicularité des diagonales** : $\overrightarrow{AC}(6; 6) \cdot \overrightarrow{BD}(-2; 2) = -12 + 12 = 0$ ✓ — propriété du losange.
- c) **Aire** — produit des demi-diagonales pour un losange, ou déterminant :
- $$A = |4 \times 4 - 2 \times 2| = |16 - 4| = 12$$
- **Contrôle par les diagonales** : $\frac{AC \times BD}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{2} = 12$ ✓
- **Angle** :
- $$\cos \hat{BAD} = \frac{16}{\sqrt{20}\sqrt{20}} = \frac{16}{20} = 0,8$$
- **Valeur** : $\hat{BAD} \approx 36,87^\circ$.
- **Contrôle de l'aire** : $AB \times AD \times \sin \hat{BAD} = 20 \times 0,6 = 12$ ✓ (car $\sin \approx 0,6$ pour $\cos = 0,8$).
- Réponse.** a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ · b) losange, pas rectangle · c) aire 12 et $\hat{BAD} \approx 36,87^\circ$.