Plaquette 3 – Problèmes de géométrie

Géométrie repérée — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le dictionnaire géométrie ↔ coordonnées.

Propriété	Traduction
A, B, C alignés	$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$
$(AB)\parallel(CD)$	$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=0$
$(AB)\perp(CD)$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$
$ABCD$ parallélogramme	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
M équidistant de A et B	$MA^2=MB^2$

Droites remarquables du triangle.

— **hauteur** issue de A : passe par A, vecteur normal $\overrightarrow{BC}$;
— **médiatrice** de $[AB]$: passe par le milieu, vecteur normal $\overrightarrow{AB}$;
— **médiane** issue de A : passe par A et par le milieu de $[BC]$.

Points remarquables. Les trois hauteurs se coupent en l'**orthocentre** ; les trois médiatrices au **centre du cercle circonscrit** ; les trois médianes au **centre de gravité**, situé aux deux tiers de chaque médiane :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Formules de base.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\qquad S_{ABC}=\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|}{2}$$

Méthode pour « démontrer que trois droites sont concourantes » : on calcule l'intersection de deux d'entre elles, puis on **vérifie** que le point obtenu appartient à la troisième.

Correction de l'exercice 1 – Nature d'un triangle et aire

a) **Carrés des longueurs** :

$$AB^2=6^2+(-2)^2=40\qquad AC^2=4^2+4^2=32\qquad BC^2=(-2)^2+6^2=40$$

— $AB=BC=\sqrt{40}$: le triangle est **isocèle en** B.
— **Test de l'angle droit** : $AC^2+BC^2=32+40=72\neq 40$, et $AB^2+AC^2=72\neq 40$: aucune égalité de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.
— **Conclusion** : ABC est isocèle en B, non rectangle.
— b) **Aire par le déterminant** : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=6\times 4-(-2)\times 4=24+8=32$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S = \frac{32}{2} = 16 \text{ unités d'aire}$$

— **Contrôle** : le triangle est inscrit dans un rectangle de 6 par 6 (aire 36) : une aire de 16 est plausible ✓

Réponse. a) isocèle en B — b) aire = 16 unités d'aire.

Correction de l'exercice 2 – Les trois hauteurs

a) **Hauteur issue de** A : vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$, simplifié en $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Elle passe par l'origine, donc

$$-x + y = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = x$$

— **Hauteur issue de** B : vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, simplifié en $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Équation de la forme $x + 3y + c = 0$, avec $B(6\,;2)$: $6 + 6 + c = 0$, donc $c = -12$.

$$x + 3y - 12 = 0$$

b) **Intersection** : on remplace y par x dans la seconde équation.

$$x + 3x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12$$

— Donc $x = 3$ et $y = 3$: l'orthocentre est $H(3\,;3)$.

— c) **Hauteur issue de** C : vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; équation $3x + y + c = 0$ avec $C(2\,;6)$: $6 + 6 + c = 0$, donc $c = -12$.

— **Test de** H : $3 \times 3 + 3 - 12 = 0$ ✓

Les trois hauteurs sont bien concourantes en $H(3\,;3)$.

Réponse. a) $y = x$ et $x + 3y - 12 = 0$ — b) $H(3\,;3)$ — c) vérifié.

Correction de l'exercice 3 – Le centre du cercle circonscrit

— a) **Médiatrice de** $[AB]$: elle passe par le milieu $I(4\,;2)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

— Équation $3x + y + c = 0$ avec I : $12 + 2 + c = 0$, donc $c = -14$.

$$3x + y - 14 = 0$$

— **Médiatrice de** $[AC]$: milieu $J(2\,;4)$, vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

— Équation $x + 3y + c = 0$ avec J : $2 + 12 + c = 0$, donc $c = -14$.

$$x + 3y - 14 = 0$$

b) **Système** : de la première, $y = 14 - 3x$. On reporte :

$$x + 3(14 - 3x) - 14 = 0 \Leftrightarrow x + 42 - 9x - 14 = 0 \Leftrightarrow -8x = -28$$

— Donc $x = 3{,}5$ et $y = 14 - 10{,}5 = 3{,}5$: le centre est $\Omega(3{,}5\,;3{,}5)$.

— **Rayon** : $\Omega A^2 = (3{,}5 - 1)^2 + (3{,}5 - 1)^2 = 6{,}25 + 6{,}25 = 12{,}5$, donc $R = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$.

— **Vérification** : $\Omega B^2 = (3{,}5)^2 + (0{,}5)^2 = 12{,}25 + 0{,}25 = 12{,}5$ ✓ et $\Omega C^2 = 0{,}25 + 12{,}25 = 12{,}5$ ✓

Les trois distances sont égales : Ω est bien le centre du cercle circonscrit.

Réponse. b) $\Omega(3{,}5\,;3{,}5)$ et $R = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 4 – L'équation du cercle circonscrit

On connaît le centre $\Omega(3{,}5\,;3{,}5)$ et $R^2 = 12{,}5$.

Forme canonique :

$$(x-3{,}5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 12{,}5$$

Forme développée : on développe les deux carrés.

— $(x-3{,}5)^2 = x^2 - 7x + 12{,}25$ et $(y-3{,}5)^2 = y^2 - 7y + 12{,}25$.
— La somme vaut $x^2 + y^2 - 7x - 7y + 24{,}5$, donc l'équation devient :

$$x^2 + y^2 - 7x - 7y + 12 = 0$$

— **Vérification avec** $A(1\,;1)$: $1 + 1 - 7 - 7 + 12 = 0$ ✓
— **Vérification avec** $B(7\,;3)$: $49 + 9 - 49 - 21 + 12 = 0$ ✓
— **Vérification avec** $C(3\,;7)$: $9 + 49 - 21 - 49 + 12 = 0$ ✓

Remarque de méthode. On aurait pu partir de la forme développée $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et résoudre un système de trois équations, une par point : c'est plus long, mais cela évite de chercher le centre.

Réponse. $(x-3{,}5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 12{,}5$, soit $x^2 + y^2 - 7x - 7y + 12 = 0$.

Correction de l'exercice 5 – Un trapèze

Un trapèze a deux côtés parallèles : on teste les deux couples de côtés opposés.

— **Côtés** $[AB]$ **et** $[DC]$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{DC}\right) = 6\times 1 - 2\times 3 = 0$$

— Ces deux côtés sont **parallèles** : $ABCD$ est un trapèze. De plus $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$: la grande base est le double de la petite.
— **Autre couple** : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, de déterminant $8 + 5 = 13 \neq 0$: ces côtés ne sont pas parallèles, ce n'est donc **pas** un parallélogramme.

Est-il rectangle ? On teste l'angle en A :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6\times 2 + 2\times 5 = 22 \neq 0$$

L'angle n'est pas droit : le trapèze **n'est pas rectangle**.

Conclusion rédigée. $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, non rectangle et non parallélogramme.

Réponse. Trapèze ($\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$), non rectangle.

Correction de l'exercice 6 – Les médianes concourantes

— a) **Médiane issue de** A : elle passe par $A(0\,;0)$ et par le milieu I de $[BC]$, soit $I(5\,;3)$.
— Son vecteur directeur est $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et l'équation $3x - 5y = 0$ (elle passe par l'origine).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Médiane issue de** B : milieu J de $[AC]$, soit $J(1\,;3)$; vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$, vecteur normal $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

— Équation $3x+7y+c=0$ avec $B(8\,;0)$: $24+c=0$, donc $c=-24$.

$$3x+7y-24=0$$

b) **Système** : de la première, $y=\dfrac{3x}{5}$. On reporte :

$$3x+7\times\frac{3x}{5}=24\Leftrightarrow\frac{15x+21x}{5}=24\Leftrightarrow 36x=120$$

— Donc $x=\dfrac{10}{3}$ et $y=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{10}{3}=2$.

— **Comparaison avec la formule du centre de gravité** :

$$G\left(\frac{0+8+2}{3}\,;\frac{0+0+6}{3}\right)=G\left(\frac{10}{3}\,;2\right)$$

— Les deux résultats coïncident ✓

Réponse. b) $G\left(\dfrac{10}{3}\,;2\right)$, conforme à la moyenne des sommets.

Correction de l’exercice 7 – Le projeté et la distance

a) **Deux conditions.** H appartient à d, donc $H(t\,;2t)$ pour un réel t ; et $\overrightarrow{PH}$ est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ de d.

$$\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix}t-5\\2t\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{PH}\cdot\vec{u}=0$$

— **Équation** : $(t-5)+2\times 2t=0$, soit $5t=5$ et $t=1$.

— Donc $H(1\,;2)$.

— b) **Distance** :

$$PH=\sqrt{(1-5)^2+(2-0)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx 4{,}47$$

— **Vérification de l’orthogonalité** : $\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donnent $-4+4=0$ ✓

Pourquoi c’est la plus courte distance. Pour tout autre point M de d, le triangle PHM est rectangle en H, donc $PM>PH$: le projeté orthogonal réalise bien le minimum.

Réponse. a) $H(1\,;2)$ — b) $PH=2\sqrt{5}\approx 4{,}47$.

Correction de l’exercice 8 – Le symétrique par rapport à une droite

Caractérisation. Le symétrique P' est tel que le projeté orthogonal H soit le **milieu** de $[PP']$.

— On a établi $H(1\,;2)$.

— **Égalité vectorielle** : $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{HP'}$, avec $\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$.

— On ajoute ces coordonnées à celles de H :

$$P'(1-4\,;2+2)=P'(-3\,;4)$$

— **Vérification par le milieu** : le milieu de $[PP']$ vaut $\left(\dfrac{5-3}{2}\,;\dfrac{0+4}{2}\right)=(1\,;2)=H$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Vérification par les distances** : P et P' doivent être à la même distance de d ; par symétrie, $P'H = PH = 2\sqrt{5}$ ✓
— **Contrôle supplémentaire** : P' n'appartient pas à d, car $4 \neq 2 \times (-3)$ — cohérent, un point hors de la droite a un symétrique hors de la droite.

Résumé de la méthode. Projeté orthogonal d'abord, puis « le projeté est le milieu » : deux étapes, jamais une seule.

Réponse. $P'(-3\,;4)$.

Correction de l'exercice 9 – Trois droites concourantes

Méthode. On calcule l'intersection de **deux** droites, puis on **teste** le point obtenu dans la troisième.

— **Intersection de d_1 et d_2.** De la première, $y = 6 - x$. On reporte dans la seconde :

$$2x - (6 - x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$$

— Donc $x = 3$ et $y = 3$: le point est $I(3\,;3)$.
— **Test dans d_3** :

$$3 \times 3 - 4 \times 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2 \neq 0$$

Conclusion. Le point I n'appartient **pas** à d_3 : les trois droites ne sont **pas** concourantes.

— **Contrôle** : d_3 coupe bien d_1, puisque leurs vecteurs normaux $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; elles forment donc un « triangle » de trois points d'intersection distincts.

La leçon. Une question peut avoir une réponse négative : la méthode est la même, c'est la **conclusion** qui change. Il faut alors le dire clairement, et le justifier par le calcul.

Réponse. Non : $d_1 \cap d_2 = \{I(3\,;3)\}$, et $I \notin d_3$.

Correction de l'exercice 10 – Diagonales d'un quadrilatère

— a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4-(-2)\\5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.
— Les vecteurs sont égaux : $ABCD$ est un **parallélogramme**.
— b) Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur **milieu commun** :

$$I\left(\frac{-1+4}{2}\,;\frac{-1+5}{2}\right) = I(1{,}5\,;2)$$

— **Contrôle avec l'autre diagonale** : milieu de $[BD] = \left(\frac{5-2}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right) = (1{,}5\,;2)$ ✓
— c) **Longueurs** :

$$AC = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81 \qquad BD = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$$

— Les diagonales n'ont **pas** la même longueur : le parallélogramme n'est donc **pas** un rectangle.
— **Vérification par le produit scalaire** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ avec $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ vaut $-6 + 8 = 2 \neq 0$ ✓
L'angle en A n'est pas droit.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ — b) $I(1{,}5\,;2)$ — c) $AC = \sqrt{61} \neq BD = \sqrt{53}$, pas un rectangle.

Correction de l'exercice 11 – Un lieu de points

Traduction en coordonnées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\-y\end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire nul** :

$$-x(6-x)+(-y)(-y)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2=0$$

— **Forme canonique en** x : $x^2-6x=(x-3)^2-9$, d'où

$$(x-3)^2+y^2=9$$

Conclusion. C'est le **cercle de centre** $I(3\,;0)$ **et de rayon** 3, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

— **Contrôle** : le point $(3\,;3)$ donne $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$, de produit scalaire $-9+9=0$ ✓

Interprétation géométrique. Dire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, c'est dire que l'angle $A\hat{M}B$ est droit : on retrouve le théorème « un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle ».

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: centre $(3\,;0)$, rayon 3.

Correction de l'exercice 12 – Deux cercles

— a) **Équations** : $x^2+y^2=25$ et $(x-8)^2+y^2=25$.
— On **soustrait** les deux équations, ce qui élimine y^2 :

$$x^2-(x-8)^2=0 \Leftrightarrow x^2-\left(x^2-16x+64\right)=0 \Leftrightarrow 16x=64$$

— Donc $x=4$. On reporte dans la première équation :

$$16+y^2=25 \Leftrightarrow y^2=9$$

— D'où $y=3$ ou $y=-3$: les points d'intersection sont $M(4\,;3)$ et $N(4\,;-3)$.
— **Vérification** : $(4-8)^2+9=16+9=25$ ✓
— b) La droite (MN) a pour équation $x=4$: elle est **verticale**. La droite $(\Omega_1\Omega_2)$ est l'axe des abscisses, donc **horizontale**. Elles sont bien perpendiculaires.

Le résultat général. L'axe radical de deux cercles sécants — la droite de leurs points communs — est toujours perpendiculaire à la droite des centres, et la soustraction des équations le démontre en une ligne.

Réponse. a) $M(4\,;3)$ et $N(4\,;-3)$ — b) (MN) est la droite $x=4$, perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 13 – Le plan du jardin

a) **Équation de** (AC) : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$; un point de la droite s'écrit

$$M(2+5t\,;3-t)$$

— **Condition d'équidistance** : $MA^2=MP^2$, avec

$$MA^2=(5t)^2+(-t)^2=26t^2$$

$$MP^2=(2+5t-10)^2+(3-t-9)^2=(5t-8)^2+(-t-6)^2$$

— On développe : $25t^2-80t+64+t^2+12t+36=26t^2-68t+100$.
— **Égalité** : $26t^2=26t^2-68t+100$, d'où $68t=100$ et $t=\dfrac{25}{17}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Coordonnées** : $x = 2 + \dfrac{125}{17} = \dfrac{159}{17} \approx 9{,}35$ et $y = 3 - \dfrac{25}{17} = \dfrac{26}{17} \approx 1{,}53$.

— b) **Distance** :

$$MA = \sqrt{26} \times |t| = \sqrt{26} \times \frac{25}{17} \approx 7{,}50 \text{ m}$$

— **Contrôle** : $MP^2 = 26 \times \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 - 68 \times \dfrac{25}{17} + 100 \approx 56{,}2 - 100 + 100 = 56{,}2$, soit $MP \approx 7{,}50$ m ✓ Les deux distances coïncident.

Réponse. a) le banc est en $\left(\dfrac{159}{17} ; \dfrac{26}{17}\right) \approx (9{,}35 ; 1{,}53)$ — b) environ 7,5 m.

Correction de l’exercice 14 – Aire et hauteur

a) **Déterminant** : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) = 9 \times 8 - 3 \times 4 = 72 - 12 = 60$$

$$S = \frac{60}{2} = 30 \text{ unités d'aire}$$

— b) L’aire s’écrit aussi $\dfrac{1}{2} \times AB \times h$, où h est la hauteur issue de C relative à la base $[AB]$.

— **Longueur de la base** : $AB = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

— **Équation** : $30 = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times h$, donc

$$h = \frac{60}{3\sqrt{10}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$$

— **Contrôle de vraisemblance** : h doit être inférieure à $AC = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ ✓ (la hauteur est toujours plus courte que le côté oblique).

Méthode réutilisable. Une aire calculée de deux façons donne toujours une **équation** : c’est le moyen le plus court d’obtenir une hauteur ou une distance à une droite.

Réponse. a) 30 unités d’aire — b) $h = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une configuration complète

a) **Vecteurs issus de** A :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 2 + (-4) \times 4 = 16 - 16 = 0$$

— Les deux vecteurs sont orthogonaux : le triangle est **rectangle en** A.

— b) Dans un triangle rectangle, le cercle circonscrit a pour **diamètre l’hypoténuse** $[BC]$.

$$\Omega\left(\frac{5-1}{2} ; \frac{-2+6}{2}\right) = \Omega(2 ; 2)$$

— **Rayon** : $BC = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$, donc $R = 5$.

— **Vérification** : $\Omega A^2 = (2+3)^2 + (2-2)^2 = 25$ ✓, $\Omega B^2 = 9 + 16 = 25$ ✓, $\Omega C^2 = 9 + 16 = 25$ ✓

— c) $ABDC$ est un rectangle lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, l’angle en A étant déjà droit.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D+1 \\ y_D-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

— D’où $D(7\,;2)$.

— **Contrôle** : le milieu de $[AD]$ vaut $\left(\frac{-3+7}{2}\,;\frac{2+2}{2}\right) = (2\,;2) = \Omega$ ✓ Les diagonales du rectangle se coupent bien au centre du cercle circonscrit.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ — b) $\Omega(2\,;2)$ et $R = 5$ — c) $D(7\,;2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).