

Plaquette 3 – Problèmes de géométrie

Géométrie repérée – Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le dictionnaire géométrie ↔ coordonnées.

Propriété	Traduction
A, B, C alignés	$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$
$(AB) \parallel (CD)$	$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$
$(AB) \perp (CD)$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
$ABCD$ parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
M équidistant de A et B	$MA^2 = MB^2$

Droites remarquables du triangle.

- **hauteur** issue de A : passe par A , vecteur normal $\overrightarrow{BC}$;
- **médiatrice** de $[AB]$: passe par le milieu, vecteur normal $\overrightarrow{AB}$;
- **médiane** issue de A : passe par A et par le milieu de $[BC]$.

Points remarquables. Les trois hauteurs se coupent en l'**orthocentre** ; les trois médiatrices au **centre du cercle circonscrit** ; les trois médianes au **centre de gravité**, situé aux deux tiers de chaque médiane :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Formules de base.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad S_{ABC} = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{2}$$

Méthode pour « démontrer que trois droites sont concourantes » : on calcule l'intersection de deux d'entre elles, puis on **vérifie** que le point obtenu appartient à la troisième.

Correction de l'exercice 1 – Nature d'un triangle et aire

a) **Carrés des longueurs** :

$$AB^2 = 6^2 + (-2)^2 = 40 \quad AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \quad BC^2 = (-2)^2 + 6^2 = 40$$

- $AB = BC = \sqrt{40}$: le triangle est **isocèle en B**.
- **Test de l'angle droit** : $AC^2 + BC^2 = 32 + 40 = 72 \neq 40$, et $AB^2 + AC^2 = 72 \neq 40$: aucune égalité de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.
- **Conclusion** : ABC est isocèle en B , non rectangle.
- b) **Aire par le déterminant** : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 6 \times 4 - (-2) \times 4 = 24 + 8 = 32$$

$$S = \frac{32}{2} = 16 \text{ unités d'aire}$$

- **Contrôle** : le triangle est inscrit dans un rectangle de 6 par 6 (aire 36) : une aire de 16 est plausible ✓

Réponse. a) isocèle en B — b) aire = 16 unités d'aire.

Correction de l'exercice 2 - Les trois hauteurs

- a) **Hauteur issue de A** : vecteur normal $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, simplifié en $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Elle passe par l'origine, donc

$$-x + y = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = x$$

- **Hauteur issue de B** : vecteur normal $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, simplifié en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Équation de la forme $x + 3y + c = 0$, avec $B(6; 2) : 6 + 6 + c = 0$, donc $c = -12$.

$$x + 3y - 12 = 0$$

- b) **Intersection** : on remplace y par x dans la seconde équation.

$$x + 3x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12$$

- Donc $x = 3$ et $y = 3$: l'orthocentre est $H(3; 3)$.
 — c) **Hauteur issue de C** : vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; équation $3x + y + c = 0$ avec $C(2; 6) : 6 + 6 + c = 0$, donc $c = -12$.
 — **Test de H** : $3 \times 3 + 3 - 12 = 0$ ✓

Les trois hauteurs sont bien concourantes en $H(3; 3)$.

Réponse. a) $y = x$ et $x + 3y - 12 = 0$ — b) $H(3; 3)$ — c) vérifié.

Correction de l'exercice 3 - Le centre du cercle circonscrit

- a) **Médiatrice de $[AB]$** : elle passe par le milieu $I(4; 2)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Équation $3x + y + c = 0$ avec $I : 12 + 2 + c = 0$, donc $c = -14$.

$$3x + y - 14 = 0$$

- **Médiatrice de $[AC]$** : milieu $J(2; 4)$, vecteur normal $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Équation $x + 3y + c = 0$ avec $J : 2 + 12 + c = 0$, donc $c = -14$.

$$x + 3y - 14 = 0$$

- b) **Système** : de la première, $y = 14 - 3x$. On reporte :

$$x + 3(14 - 3x) - 14 = 0 \Leftrightarrow x + 42 - 9x - 14 = 0 \Leftrightarrow -8x = -28$$

- Donc $x = 3,5$ et $y = 14 - 10,5 = 3,5$: le centre est $\Omega(3,5; 3,5)$.
 — **Rayon** : $\Omega A^2 = (3,5 - 1)^2 + (3,5 - 1)^2 = 6,25 + 6,25 = 12,5$, donc $R = \sqrt{12,5} \approx 3,54$.
 — **Vérification** : $\Omega B^2 = (3,5)^2 + (0,5)^2 = 12,25 + 0,25 = 12,5$ ✓ et
 $\Omega C^2 = 0,25 + 12,25 = 12,5$ ✓

Les trois distances sont égales : Ω est bien le centre du cercle circonscrit.

Réponse. b) $\Omega(3,5; 3,5)$ et $R = \sqrt{12,5} \approx 3,54$.

Correction de l'exercice 4 - L'équation du cercle circonscrit

On connaît le centre $\Omega(3,5; 3,5)$ et $R^2 = 12,5$.

Forme canonique :

$$(x - 3,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,5$$

Forme développée : on développe les deux carrés.

$$- (x - 3,5)^2 = x^2 - 7x + 12,25 \text{ et } (y - 3,5)^2 = y^2 - 7y + 12,25.$$

— La somme vaut $x^2 + y^2 - 7x - 7y + 24,5$, donc l'équation devient :

$$x^2 + y^2 - 7x - 7y + 12 = 0$$

— **Vérification avec** $A(1; 1)$: $1 + 1 - 7 - 7 + 12 = 0$ ✓

— **Vérification avec** $B(7; 3)$: $49 + 9 - 49 - 21 + 12 = 0$ ✓

— **Vérification avec** $C(3; 7)$: $9 + 49 - 21 - 49 + 12 = 0$ ✓

Remarque de méthode. On aurait pu partir de la forme développée

$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et résoudre un système de trois équations, une par point : c'est plus long, mais cela évite de chercher le centre.

Réponse. $(x - 3,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,5$, soit $x^2 + y^2 - 7x - 7y + 12 = 0$.

Correction de l'exercice 5 - Un trapèze

Un trapèze a deux côtés parallèles : on teste les deux couples de côtés opposés.

— **Côtés** $[AB]$ et $[DC]$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}) = 6 \times 1 - 2 \times 3 = 0$$

— Ces deux côtés sont **parallèles** : $ABCD$ est un trapèze. De plus $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$: la grande base est le double de la petite.

— **Autre couple** : $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, de déterminant $8 + 5 = 13 \neq 0$: ces côtés ne sont pas parallèles, ce n'est donc **pas** un parallélogramme.

Est-il rectangle ? On teste l'angle en A :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \times 2 + 2 \times 5 = 22 \neq 0$$

L'angle n'est pas droit : le trapèze **n'est pas rectangle**.

Conclusion rédigée. $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, non rectangle et non parallélogramme.

Réponse. Trapèze ($\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$), non rectangle.

Correction de l'exercice 6 - Les médianes concourantes

— a) **Médiane issue de A** : elle passe par $A(0; 0)$ et par le milieu I de $[BC]$, soit $I(5; 3)$.

— Son vecteur directeur est $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et l'équation $3x - 5y = 0$ (elle passe par l'origine).

— **Médiane issue de B** : milieu J de $[AC]$, soit $J(1; 3)$; vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$,
vecteur normal $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

— Équation $3x + 7y + c = 0$ avec $B(8; 0)$: $24 + c = 0$, donc $c = -24$.
 $3x + 7y - 24 = 0$

b) **Système** : de la première, $y = \frac{3x}{5}$. On reporte :

$$3x + 7 \times \frac{3x}{5} = 24 \Leftrightarrow \frac{15x + 21x}{5} = 24 \Leftrightarrow 36x = 120$$

— Donc $x = \frac{10}{3}$ et $y = \frac{3}{5} \times \frac{10}{3} = 2$.

— **Comparaison avec la formule du centre de gravité** :

$$G\left(\frac{0+8+2}{3}; \frac{0+0+6}{3}\right) = G\left(\frac{10}{3}; 2\right)$$

— Les deux résultats coïncident ✓

Réponse. b) $G\left(\frac{10}{3}; 2\right)$, conforme à la moyenne des sommets.

Correction de l'exercice 7 - Le projeté et la distance

a) **Deux conditions.** H appartient à d , donc $H(t; 2t)$ pour un réel t ; et $\overrightarrow{PH}$ est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de d .

$$\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix} t-5 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$$

— **Équation** : $(t-5) + 2 \times 2t = 0$, soit $5t = 5$ et $t = 1$.

— Donc $H(1; 2)$.

— b) **Distance** :

$$PH = \sqrt{(1-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

— **Vérification de l'orthogonalité** : $\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donnent $-4 + 4 = 0$ ✓

Pourquoi c'est la plus courte distance. Pour tout autre point M de d , le triangle PHM est rectangle en H , donc $PM > PH$: le projeté orthogonal réalise bien le minimum.

Réponse. a) $H(1; 2)$ — b) $PH = 2\sqrt{5} \approx 4,47$.

Correction de l'exercice 8 - Le symétrique par rapport à une droite

Caractérisation. Le symétrique P' est tel que le projeté orthogonal H soit le **milieu** de $[PP']$.

— On a établi $H(1; 2)$.

— **Égalité vectorielle** : $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HP'}$, avec $\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— On ajoute ces coordonnées à celles de H :

$$P(1-4; 2+2) = P'(-3; 4)$$

— **Vérification par le milieu** : le milieu de $[PP']$ vaut $\left(\frac{5-3}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (1; 2) = H$ ✓

- **Vérification par les distances** : P et P' doivent être à la même distance de d ; par symétrie, $P'H = PH = 2\sqrt{5}$ ✓
- **Contrôle supplémentaire** : P' n'appartient pas à d , car $4 \neq 2 \times (-3)$ — cohérent, un point hors de la droite a un symétrique hors de la droite.

Résumé de la méthode. Projeté orthogonal d'abord, puis « le projeté est le milieu » : deux étapes, jamais une seule.

Réponse. $P'(-3; 4)$.

Correction de l'exercice 9 - Trois droites concourantes

Méthode. On calcule l'intersection de **deux** droites, puis on **teste** le point obtenu dans la troisième.

- **Intersection de d_1 et d_2 .** De la première, $y = 6 - x$. On reporte dans la seconde :

$$2x - (6 - x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$$

- Donc $x = 3$ et $y = 3$: le point est $I(3; 3)$.

- **Test dans d_3 :**

$$3 \times 3 - 4 \times 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2 \neq 0$$

Conclusion. Le point I n'appartient **pas** à d_3 : les trois droites ne sont **pas** concourantes.

- **Contrôle** : d_3 coupe bien d_1 , puisque leurs vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; elles forment donc un « triangle » de trois points d'intersection distincts.

La leçon. Une question peut avoir une réponse négative : la méthode est la même, c'est la **conclusion** qui change. Il faut alors le dire clairement, et le justifier par le calcul.

Réponse. Non : $d_1 \cap d_2 = \{I(3; 3)\}$, et $I \notin d_3$.

Correction de l'exercice 10 - Diagonales d'un quadrilatère

- a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs sont égaux : $ABCD$ est un **parallélogramme**.

- b) Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur **milieu commun** :

$$I\left(\frac{-1+4}{2}; \frac{-1+5}{2}\right) = I(1,5; 2)$$

- **Contrôle avec l'autre diagonale** : milieu de $[BD] = \left(\frac{5-2}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = (1,5; 2)$ ✓

- c) **Longueurs** :

$$AC = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \approx 7,81 \quad BD = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{53} \approx 7,28$$

- Les diagonales n'ont **pas** la même longueur : le parallélogramme n'est donc **pas** un rectangle.

- **Vérification par le produit scalaire** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ avec $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ vaut $-6 + 8 = 2 \neq 0$ ✓
L'angle en A n'est pas droit.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ — b) $I(1,5; 2)$ — c) $AC = \sqrt{61} \neq BD = \sqrt{53}$, pas un rectangle.

Correction de l'exercice 11 - Un lieu de points

Traduction en coordonnées.

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 6-x \\ -y \end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire nul :**

$$-x(6-x) + (-y)(-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 = 0$$

— **Forme canonique en x :** $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, d'où

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

Conclusion. C'est le **cercle de centre** $I(3; 0)$ **et de rayon** 3, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

— **Contrôle :** le point $(3; 3)$ donne $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, de produit scalaire $-9 + 9 = 0$
✓

Interprétation géométrique. Dire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, c'est dire que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit : on retrouve le théorème « un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle ».

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: centre $(3; 0)$, rayon 3.

Correction de l'exercice 12 - Deux cercles

— a) **Équations :** $x^2 + y^2 = 25$ et $(x-8)^2 + y^2 = 25$.

— On **soustrait** les deux équations, ce qui élimine y^2 :

$$x^2 - (x-8)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x^2 - 16x + 64) = 0 \Leftrightarrow 16x = 64$$

— Donc $x = 4$. On reporte dans la première équation :

$$16 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 9$$

— D'où $y = 3$ ou $y = -3$: les points d'intersection sont $M(4; 3)$ et $N(4; -3)$.

— **Vérification :** $(4-8)^2 + 9 = 16 + 9 = 25$ ✓

— b) La droite (MN) a pour équation $x = 4$: elle est **verticale**. La droite $(\Omega_1\Omega_2)$ est l'axe des abscisses, donc **horizontale**. Elles sont bien perpendiculaires.

Le résultat général. L'axe radical de deux cercles sécants — la droite de leurs points communs — est toujours perpendiculaire à la droite des centres, et la soustraction des équations le démontre en une ligne.

Réponse. a) $M(4; 3)$ et $N(4; -3)$ — b) (MN) est la droite $x = 4$, perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 13 - Le plan du jardin

a) **Équation de** (AC) : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; un point de la droite s'écrit

$$M(2+5t; 3-t)$$

— **Condition d'équidistance :** $MA^2 = MP^2$, avec

$$MA^2 = (5t)^2 + (-t)^2 = 26t^2$$

$$MP^2 = (2+5t-10)^2 + (3-t-9)^2 = (5t-8)^2 + (-t-6)^2$$

— On développe : $25t^2 - 80t + 64 + t^2 + 12t + 36 = 26t^2 - 68t + 100$.

— **Égalité :** $26t^2 = 26t^2 - 68t + 100$, d'où $68t = 100$ et $t = \frac{25}{17}$.

— **Coordonnées** : $x = 2 + \frac{125}{17} = \frac{159}{17} \approx 9,35$ et $y = 3 - \frac{25}{17} = \frac{26}{17} \approx 1,53$.

— b) **Distance** :

$$MA = \sqrt{26} \times |t| = \sqrt{26} \times \frac{25}{17} \approx 7,50 \text{ m}$$

— **Contrôle** : $MP^2 = 26 \times \left(\frac{25}{17}\right)^2 - 68 \times \frac{25}{17} + 100 = 56,2 - 100 + 100 = 56,2$, soit $MP \approx 7,50 \text{ m}$ ✓ Les deux distances coïncident.

Réponse. a) le banc est en $\left(\frac{159}{17}; \frac{26}{17}\right) \approx (9,35; 1,53)$ — b) environ 7,5 m.

Correction de l'exercice 14 - Aire et hauteur

a) **Déterminant** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 9 \times 8 - 3 \times 4 = 72 - 12 = 60$$

$$S = \frac{60}{2} = 30 \text{ unités d'aire}$$

— b) L'aire s'écrit aussi $\frac{1}{2} \times AB \times h$, où h est la hauteur issue de C relative à la base $[AB]$.

— **Longueur de la base** : $AB = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

— **Équation** : $30 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times h$, donc

$$h = \frac{60}{3\sqrt{10}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \approx 6,32$$

— **Contrôle de vraisemblance** : h doit être inférieure à $AC = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \approx 8,94$ ✓ (la hauteur est toujours plus courte que le côté oblique).

Méthode réutilisable. Une aire calculée de deux façons donne toujours une **équation** : c'est le moyen le plus court d'obtenir une hauteur ou une distance à une droite.

Réponse. a) 30 unités d'aire — b) $h = 2\sqrt{10} \approx 6,32$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une configuration complète

a) **Vecteurs issus de A** :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 2 + (-4) \times 4 = 16 - 16 = 0$$

— Les deux vecteurs sont orthogonaux : le triangle est **rectangle en A**.

— b) Dans un triangle rectangle, le cercle circonscrit a pour **diamètre l'hypoténuse** $[BC]$.

$$\Omega \left(\frac{5-1}{2}; \frac{-2+6}{2} \right) = \Omega(2; 2)$$

— **Rayon** : $BC = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$, donc $R = 5$.

— **Vérification** : $\Omega A^2 = (2+3)^2 + (2-2)^2 = 25$ ✓, $\Omega B^2 = 9 + 16 = 25$ ✓, $\Omega C^2 = 9 + 16 = 25$ ✓

— c) $ABDC$ est un rectangle lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, l'angle en A étant déjà droit.

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D + 1 \\ y_D - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- D'où $D(7; 2)$.
- **Contrôle** : le milieu de $[AD]$ vaut $\left(\frac{-3+7}{2}; \frac{2+2}{2}\right) = (2; 2) = \Omega$ ✓ Les diagonales du rectangle se coupent bien au centre du cercle circonscrit.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ — b) $\Omega(2; 2)$ et $R = 5$ — c) $D(7; 2)$.