Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cercles, tangentes et configurations

Géométrie repérée — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation d'un cercle.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2-2ax-2by+\left(a^2+b^2-R^2\right)=0$$

Pour identifier centre et rayon depuis $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$: on **complète les carrés**, ce qui donne le centre $\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$ et $R^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}-\gamma$.

— Si $R^2>0$: un vrai cercle ; si $R^2=0$: un point ; si $R^2<0$: **aucun** point.

Caractérisations par produit scalaire.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow M \text{ sur le cercle de diamètre } [AB]$$

Intersection droite-cercle. On **substitue** l'équation de la droite dans celle du cercle ; le discriminant décide :

— $\Delta>0$: **deux** points · $\Delta=0$: **tangence** · $\Delta<0$: **aucun** point.

Autre méthode : comparer $d(\Omega,\text{droite})$ et R.

Longueur d'une corde à distance d du centre :

$$\ell=2\sqrt{R^2-d^2}$$

Tangente en un point T du cercle : droite passant par T de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega T}$.

Deux cercles de centres Ω_1,Ω_2 et rayons R_1,R_2, avec $d=\Omega_1\Omega_2$:

Condition	Position
$d>R_1+R_2$	extérieurs, disjoints
$d=R_1+R_2$	tangents extérieurement
$\lvert R_1-R_2\rvert<d<R_1+R_2$	sécants (deux points)
$d=\lvert R_1-R_2\rvert$	tangents intérieurement
$d<\lvert R_1-R_2\rvert$	l'un dans l'autre

Correction de l'exercice 1 – Forme développée d'un cercle

— **Complétion des carrés** : $x^2+2x=(x+1)^2-1$ et $y^2-8y=(y-4)^2-16$.

— **Réécriture** : $(x+1)^2-1+(y-4)^2-16+8=0$, soit

$$(x+1)^2+(y-4)^2=9$$

— **Conclusion** : c'est un **cercle** de centre $\Omega(-1\,;4)$ et de rayon $R=3$.

— **Contrôle par la formule** : $\alpha=2$ et $\beta=-8$ donnent le centre $(-1\,;4)$ ✓, et $R^2=\frac{4+64}{4}-8=17-8=9$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Points de contrôle** : $(2\,;4)$ donne $4+16+4-32+8=0$ ✓ ; $(-1\,;7)$ donne $1+49-2-56+8=0$ ✓

— **Cas limites à connaître** : avec $+17$ au lieu de $+8$, on aurait $R^2=0$ (un seul point, le centre) ; avec $+20$, $R^2=-3$ et **aucun** point.

— **Intersection avec l'axe des ordonnées** : $x=0$ donne $1+(y-4)^2=9$, soit $y=4\pm 2\sqrt{2}$, environ 1,172 et 6,828.

Réponse. Oui : centre $\Omega(-1\,;4)$, rayon 3.

Correction de l'exercice 2 – Intersection droite-cercle

— **Substitution** : $x^2+(x+2)^2=10$, soit $x^2+x^2+4x+4=10$, donc

$$2x^2+4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+2x-3=0$$

— **Résolution** : $\Delta=4+12=16$, donc $x=\dfrac{-2\pm 4}{2}$, soit $x=1$ ou $x=-3$.

— **Ordonnées** : $y=3$ et $y=-1$.

— **Points** :

$$M_1(1\,;3) \qquad M_2(-3\,;-1)$$

— **Contrôles** : $1+9=10$ ✓ et $9+1=10$ ✓

— **Contrôle de l'appartenance à la droite** : $3=1+2$ ✓ et $-1=-3+2$ ✓

— **Vérification par la distance** : $d(O,\text{droite})=\dfrac{|0-0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\approx 1{,}414<\sqrt{10}\approx 3{,}162$ ✓ — sécante.

— **Longueur de la corde** : $2\sqrt{10-2}=2\sqrt{8}\approx 5{,}657$; contrôle direct : $M_1M_2=\|(4\,;4)\|=\sqrt{32}\approx 5{,}657$ ✓

Réponse. $M_1(1\,;3)$ et $M_2(-3\,;-1)$.

Correction de l'exercice 3 – Tangence à déterminer

— **Méthode par la distance** : le centre est $O(0\,;0)$ et le rayon $R=2\sqrt{2}$.

— La droite s'écrit $x-y+p=0$, donc

$$d(O,\text{droite})=\frac{|p|}{\sqrt{2}}$$

— **Condition de tangence** : $\dfrac{|p|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, donc $|p|=4$ et

$$p=4 \quad\text{ou}\quad p=-4$$

— **Contrôle par le discriminant** : $x^2+(x+p)^2=8$ donne $2x^2+2px+p^2-8=0$, de discriminant $4p^2-8\left(p^2-8\right)=-4p^2+64$.

— **Annulation** : $p^2=16$, donc $p=\pm 4$ ✓

— **Points de contact** : pour $p=4$, $2x^2+8x+8=0$ donne $(x+2)^2=0$ et $x=-2$, donc $T(-2\,;2)$.

— **Vérification** : $4+4=8$ ✓ et $2=-2+4$ ✓

— **Pour** $p=-4$: $T(2\,;-2)$, le point diamétralement opposé ✓

— **Cohérence** : pour $|p|<4$ la droite est sécante, pour $|p|>4$ elle ne coupe pas le cercle.

Réponse. $p=4$ (contact en $(-2\,;2)$) ou $p=-4$ (contact en $(2\,;-2)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 4 – Tangentes issues d'un point

— **Position de** P : $OP = 6 > 3 = R$, donc P est **extérieur** — il existe deux tangentes.
— **Longueur de la tangente** (Pythagore dans le triangle rectangle OTP, avec $\widehat{OTP} = 90°$) :

$$PT = \sqrt{OP^2 - R^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}1962$$

— **Points de contact** : T vérifie $OT = 3$ et $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$.
— La condition $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OP} = OT^2 = 9$ donne $6x_T = 9$, soit $x_T = 1{,}5$.
— **Puis** : $y_T^2 = 9 - 2{,}25 = 6{,}75$, donc $y_T = \pm\sqrt{6{,}75} \approx \pm 2{,}5981$.
— **Points** : $T_1(1{,}5\,;2{,}598)$ et $T_2(1{,}5\,;-2{,}598)$.
— **Contrôle** : $PT_1 = \sqrt{(6 - 1{,}5)^2 + 2{,}598^2} \approx \sqrt{20{,}25 + 6{,}75} = \sqrt{27}$ ✓
— **Angle au sommet** : $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{R}{OP} = 0{,}5$, donc $\dfrac{\theta}{2} = 30°$ et $\theta = 60°$ — les deux tangentes forment un angle de 60° ✓
— **Contrôle** : $\dfrac{2{,}598}{4{,}5} \approx 0{,}5774 = \tan 30°$ ✓

Réponse. $PT = 3\sqrt{3} \approx 5{,}196$, contacts en $\left(1{,}5\,;\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 5 – Deux cercles sécants

— **Soustraction** : $x^2 + y^2 - 25 = 0$ et $x^2 - 16x + 64 + y^2 - 25 = 0$.
— **Différence** : $16x - 64 = 0$, donc

$$x = 4$$

— **Substitution** : $16 + y^2 = 25$, donc $y^2 = 9$ et $y = \pm 3$.
— **Points** :

$$M_1(4\,;3) \qquad M_2(4\,;-3)$$

— **Contrôles** : $16 + 9 = 25$ ✓ et $(4 - 8)^2 + 9 = 16 + 9 = 25$ ✓
— **Vérification de la configuration** : les centres $O(0\,;0)$ et $\Omega(8\,;0)$ sont distants de 8, avec $|R_1 - R_2| = 0 < 8 < R_1 + R_2 = 10$ ✓ — sécants.
— **Axe radical** : la droite $x = 4$, qui est la **médiatrice** de $[O\Omega]$ — logique, les deux rayons étant égaux ✓
— **Longueur de la corde commune** : $M_1M_2 = 6$.
— **Contrôle** : $2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 6$ ✓, avec $d = 4$ la distance du centre à l'axe radical.

Réponse. $M_1(4\,;3)$ et $M_2(4\,;-3)$.

Correction de l'exercice 6 – Cercle par trois points

— **Forme générale** : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
— **Passage par** A : $\gamma = 0$.
— **Passage par** B : $16 + 4\alpha = 0$, donc $\alpha = -4$.
— **Passage par** C : $4 + 2\beta = 0$, donc $\beta = -2$.
— **Équation** :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

— **Forme canonique** : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Centre** : $\Omega(2\,;1)$; **rayon** : $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$.
— **Contrôles** : A donne $4+1=5$ ✓ ; B donne $4+1=5$ ✓ ; C donne $4+1=5$ ✓
— **Contrôle géométrique** : le triangle est **rectangle en** A (les côtés sont sur les axes), donc $[BC]$ est un diamètre.
— **Vérification** : le milieu de $[BC]$ est $(2\,;1)=\Omega$ ✓ et $BC=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, de moitié $\sqrt{5}=R$ ✓

Réponse. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

Correction de l’exercice 7 – Corde de longueur donnée

— **Relation** : $\ell = 2\sqrt{R^2-d^2}$, donc

$$8 = 2\sqrt{25-d^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{25-d^2}=4$$

— **Résolution** : $25-d^2=16$, donc $d^2=9$ et

$$d=3$$

— **Contrôle par Pythagore** : la demi-corde (4), la distance au centre (3) et le rayon (5) forment un triangle rectangle : $9+16=25$ ✓
— **Triplet remarquable** : encore le 3-4-5.
— **Cas extrêmes** : $d=0$ donne le **diamètre** $\ell=10$ (corde maximale) ; $d=5$ donne $\ell=0$ (la corde se réduit au point de tangence).
— **Autres cordes** : une corde de longueur 6 serait à la distance $\sqrt{25-9}=4$ du centre ✓
— **Remarque** : deux cordes de même longueur sont toujours à la **même** distance du centre — d’où l’existence d’une infinité de cordes de longueur 8, toutes tangentes au cercle de rayon 3.

Réponse. $d=3$.

Correction de l’exercice 8 – Cercle tangent à une droite

— **Rayon** = distance du centre à la droite :

$$R=\frac{|9+16-10|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

— **Équation** :

$$(x-3)^2+(y-4)^2=9$$

— **Point de tangence** : $T=\Omega+t\vec{n}$ avec $\vec{n}(3\,;4)$; on résout $3(3+3t)+4(4+4t)-10=0$.
— **Calcul** : $9+9t+16+16t-10=15+25t=0$, donc $t=-0{,}6$.
— **Point** : $T(3-1{,}8\,;4-2{,}4)=T(1{,}2\,;1{,}6)$.
— **Contrôles** : $3{,}6+6{,}4-10=0$ ✓ (sur la droite) et $(1{,}2-3)^2+(1{,}6-4)^2=3{,}24+5{,}76=9$ ✓ (sur le cercle).
— **Contrôle du rayon** : $|t|\times\|\vec{n}\|=0{,}6\times 5=3$ ✓
— **Unicité du point de contact** : la substitution de la droite dans le cercle donnerait un discriminant **nul** — caractéristique de la tangence ✓

Réponse. $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, tangent en $T(1{,}2\,;1{,}6)$.

Correction de l’exercice 9 – Lieu avec produit scalaire

— **Nature** : le cercle de diamètre $[AB]$.
— **Centre** : le milieu $\Omega(3\,;4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Rayon** : $\frac{AB}{2}$ avec $AB = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, donc $R = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8284$.
— **Équation** :

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8$$

— **Contrôles** : A donne $4+4=8$ ✓ et B donne $4+4=8$ ✓
— **Vérification par le calcul** : $(1-x)(5-x) + (2-y)(6-y) = 5 - 6x + x^2 + 12 - 8y + y^2$.
— **Équation obtenue** : $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0$.
— **Contrôle de l'équivalence** :
$(x-3)^2 + (y-4)^2 - 8 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 8 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17$ ✓
— **Point de test** : $(5\,;2)$ donne $25 + 4 - 30 - 16 + 17 = 0$ ✓ ; et $\overrightarrow{MA}(-4\,;0) \cdot \overrightarrow{MB}(0\,;4) = 0$ ✓

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8$.

Correction de l'exercice 10 – Cercle inscrit dans un angle

— **Centre** : de la forme $\Omega(a\,;a)$ avec $a > 0$.
— **Tangence à l'axe des abscisses** : la distance du centre à cet axe vaut $|a| = a$, donc $R = a$.
— **Tangence à l'axe des ordonnées** : la distance vaut également a — **automatiquement** satisfaite ✓
— **Conclusion** : tout cercle de centre $(a\,;a)$ et de rayon a convient. Il y a donc une **infinité** de solutions, formant une famille à un paramètre.

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

— **Exemple avec** $a = 2$: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, tangent en $(2\,;0)$ et $(0\,;2)$ ✓
— **Contrôle** : $(2\,;0)$ donne $0 + 4 = 4$ ✓
— **Raison géométrique** : le centre d'un cercle tangent aux deux axes est nécessairement sur une **bissectrice** des axes — ici $y = x$, d'où la condition automatiquement vérifiée.
— **Condition supplémentaire** : si l'on impose en outre le passage par un point donné, par exemple $(1\,;0)$, alors $(1-a)^2 + a^2 = a^2$ donne $a = 1$ et le cercle est unique ✓

Réponse. Tout cercle $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ avec $a > 0$ (rayon $= a$).

Correction de l'exercice 11 – Discriminant et position

— **Substitution** : $(x-1)^2 + (m-2)^2 = 4$, soit

$$(x-1)^2 = 4 - (m-2)^2$$

— **Discussion** :
— Si $4 - (m-2)^2 > 0$, soit $|m-2| < 2$ et $0 < m < 4$: **deux** points.
— Si $(m-2)^2 = 4$, soit $m = 0$ ou $m = 4$: **un** point (tangence).
— Si $(m-2)^2 > 4$, soit $m < 0$ ou $m > 4$: **aucun** point.
— **Contrôles** : pour $m = 2$ (le centre), $(x-1)^2 = 4$ donne $x = -1$ ou $x = 3$ — deux points, la corde étant le **diamètre** horizontal ✓
— Pour $m = 4$, $(x-1)^2 = 0$ donne le seul point $(1\,;4)$ — le **sommet** du cercle ✓
— Pour $m = 5$, $(x-1)^2 = -5 < 0$: impossible ✓
— **Lecture géométrique** : le cercle a pour centre $(1\,;2)$ et rayon 2, il est donc « compris » entre les horizontales $y = 0$ et $y = 4$ — d'où exactement cet intervalle ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Longueur de la corde** : $2\sqrt{4-(m-2)^2}$, maximale (4) pour $m=2$.

Réponse. Deux points si $0<m<4$, un si $m\in\{0\,;4\}$, aucun sinon.

Correction de l'exercice 12 – Configuration avec trois cercles

— **Distances entre centres** :
— $AB=2$;
— $AC=\sqrt{1+3}=2$;
— $BC=\sqrt{1+3}=2$.
— **Triangle équilatéral** de côté 2 ✓
— **Condition de tangence extérieure** : $d=R_1+R_2=1+1=2$ ✓ — vérifiée pour les trois paires.
— **Conclusion** : les trois cercles sont **tangents extérieurement** deux à deux.
— **Points de contact** : les milieux des côtés, soit $(1\,;0)$, $\left(0{,}5\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(1{,}5\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
— **Contrôle** : $(1\,;0)$ est à distance 1 de A et de B ✓
— **Contrôle du deuxième** : $0{,}25+0{,}75=1$ pour la distance à A ✓
— **Cercle circonscrit aux trois contacts** : de centre le centre de gravité $\left(1\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — avec $\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}5774$.
— **Aire de l'« espace vide » central** : celle du triangle équilatéral ($\sqrt{3}\approx 1{,}732$) moins trois secteurs de 60° et de rayon 1 ($3\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}5708$), soit environ 0,1613.

Réponse. Les centres forment un triangle équilatéral de côté $2=R_1+R_2$: tangence deux à deux.

Correction de l'exercice 13 – Distance et minimum

— **Écriture cartésienne** : $2x-y-1=0$, de vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1)$.
— **Distance** :

$$d(P,d)=\frac{|6-4-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}44721$$

— **Projeté** : $H=P+t\vec{n}$; on résout $2(3+2t)-(4-t)-1=0$.
— **Calcul** : $6+4t-4+t-1=1+5t=0$, donc $t=-0{,}2$.
— **Point** : $H(3-0{,}4\,;4+0{,}2)=H(2{,}6\,;4{,}2)$.
— **Contrôles** : H est sur d car $2\times 2{,}6-1=4{,}2$ ✓
— **Distance** : $\left|\overrightarrow{PH}\right|=\|(-0{,}4\,;0{,}2)\|=\sqrt{0{,}16+0{,}04}=\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}44721$ ✓
— **Contrôle par la formule** : $|t|\times\|\vec{n}\|=0{,}2\times\sqrt{5}\approx 0{,}44721$ ✓
— **Contrôle par un autre point de** d : le point $(3\,;5)$ appartient à d et se trouve à la distance 1 de P — plus que 0,447 ✓
— **Minimalité** : pour tout M de d, $PM^2=PH^2+HM^2\geq PH^2$ — le minimum est atteint en H ✓

Réponse. $H(2{,}6\,;4{,}2)$, à distance $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}447$.

Correction de l'exercice 14 – Cercle et paramètre

— **Complétion** : $(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+k=0$, soit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(x-2)^2+(y+3)^2=13-k$$

— **Condition** : il faut $13-k>0$, donc

$$k<13$$

— **Rayon** : $R=\sqrt{13-k}$.

— **Centre** : $\Omega(2\,;-3)$, **indépendant** de k — la famille est constituée de cercles **concentriques** ✓

— **Cas limites** : $k=13$ donne le seul point Ω ; $k>13$ donne l'**ensemble vide**.

— **Exemples** : $k=4$ donne $R=3$; $k=-12$ donne $R=5$; $k=12$ donne $R=1$.

— **Contrôle pour** $k=4$: le point $(5\,;-3)$ donne $25+9-20-18+4=0$ ✓, et il est bien à distance 3 de Ω ✓

— **Passage par l'origine** : $O(0\,;0)$ appartient au cercle si $k=0$, et alors $R=\sqrt{13}\approx 3{,}606$ — égal à ΩO ✓

Réponse. $k<13$, avec $R=\sqrt{13-k}$ et le centre fixe $\Omega(2\,;-3)$.

Correction de l'exercice 15 – Symétrie d'un cercle

Symétrie centrale de centre O. Elle transforme $(x\,;y)$ en $(-x\,;-y)$, donc le centre $\Omega(1\,;2)$ devient $\Omega'(-1\,;-2)$, le rayon étant conservé.

$$(x+1)^2+(y+2)^2=4$$

Symétrie d'axe (Oy). Elle transforme $(x\,;y)$ en $(-x\,;y)$, donc Ω devient $(-1\,;2)$.

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4$$

— **Contrôle du premier** : $(1\,;2)$ étant sur le cercle initial… vérifions plutôt avec un point réel du cercle, $(3\,;2)$: $4+0=4$ ✓ Son image par la symétrie centrale est $(-3\,;-2)$, et $(-3+1)^2+(-2+2)^2=4$ ✓

— **Contrôle du second** : l'image de $(3\,;2)$ est $(-3\,;2)$, et $(-3+1)^2+(2-2)^2=4$ ✓

— **Invariance du rayon** : les deux symétries sont des **isométries**, elles conservent donc les distances et le rayon ✓

— **Remarque** : les deux cercles images se coupent-ils ? Leurs centres $(-1\,;-2)$ et $(-1\,;2)$ sont distants de $4=R_1+R_2$ — ils sont **tangents** en $(-1\,;0)$ ✓

— **Vérification** : $(-1\,;0)$ donne $0+4=4$ dans les deux équations ✓

Réponse. $(x+1)^2+(y+2)^2=4$ et $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : configuration complète

a) **Cercle** : centre $\Omega(4\,;0)$, rayon 4.

$$(x-4)^2+y^2=16 \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2-8x=0$$

b) **Test de position** : la droite s'écrit $x-y-2=0$, donc

$$d(\Omega,d)=\frac{|4-0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\approx 1{,}4142$$

— $\sqrt{2}<4$, donc la droite est **sécante** ✓

— **Points d'intersection** : en substituant $y=x-2$ dans $x^2+y^2-8x=0$:

$$x^2+(x-2)^2-8x=2x^2-12x+4=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x^2-6x+2=0$$

— **Résolution** : $\Delta=36-8=28$, donc $x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{7}}{2}=3\pm\sqrt{7}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Valeurs** : $x_1 \approx 5{,}6458$ et $x_2 \approx 0{,}3542$, avec $y = x - 2$.

$$M_1(5{,}646\,;3{,}646) \qquad M_2(0{,}354\,;-1{,}646)$$

— **Contrôle** : $x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 \approx 31{,}875 + 13{,}292 - 45{,}166 = 0$ ✓

c) **Longueur de la corde** :

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{16 - 2} = 2\sqrt{14} \approx 7{,}4833$$

— **Contrôle direct** : $M_1M_2 = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7}\sqrt{2} = 2\sqrt{14}$ ✓

— **Aire du triangle** $\Omega M_1 M_2$:

$$A = \frac{\ell \times d}{2} = \frac{2\sqrt{14} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5{,}2915$$

— **Contrôle** : le triangle est isocèle de côtés 4, 4 et $2\sqrt{14} \approx 7{,}483$; sa hauteur depuis Ω vaut $\sqrt{2}$, d'où l'aire $\dfrac{7{,}483 \times 1{,}4142}{2} \approx 5{,}2915$ ✓

— **Angle au centre** : $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{14}}{4} \approx 0{,}9354$, donc $\dfrac{\theta}{2} \approx 69{,}30°$ et $\theta \approx 138{,}59°$ — un angle obtus, cohérent avec une corde presque égale au diamètre ✓

Réponse. a) $(x-4)^2 + y^2 = 16$ · b) sécante en $3 \pm \sqrt{7}$ · c) corde $2\sqrt{14} \approx 7{,}48$ et aire $2\sqrt{7} \approx 5{,}29$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).