

Plaquette 1 - Vecteurs et coordonnées

Géométrie repérée — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coordonnées d'un vecteur. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Norme (dans un repère orthonormé) et **distance** :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Milieu de $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Colinéarité. $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si leur **déterminant** est nul :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx' = 0$$

Les traductions à connaître.

- A, B, C **alignés** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ;
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires ;
- $ABCD$ **parallélogramme** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le **même milieu** ;
- $ABCD$ **losange** : parallélogramme avec $AB = AD$;
- $ABCD$ **rectangle** : parallélogramme avec $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Attention à l'ordre des lettres : $ABCD$ se lit dans l'ordre du contour, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

— et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 1 - Coordonnées et normes

a) On soustrait les coordonnées de l'origine du vecteur à celles de son extrémité :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ -5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) La norme se calcule avec le théorème de Pythagore :

$$AB = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,32$$

$$— AC = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,25.$$

Attention au sens de la soustraction. $\overrightarrow{AB}$ se calcule « extrémité moins origine » : inverser donnerait $\overrightarrow{BA}$, le vecteur opposé.

Simplification des radicaux. $\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$: on extrait toujours le plus grand carré parfait.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB}(6; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -8)$ — b) $AB = 2\sqrt{10}$ et $AC = 2\sqrt{17}$.

Correction de l'exercice 2 - Trois points alignés ?

Trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

— **Coordonnées** :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

— **Déterminant** :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3 \times 3 - 1 \times 9 = 9 - 9 = 0$$

— Le déterminant est nul : les vecteurs sont colinéaires, donc les points A , B et C sont **alignés**.

Confirmation directe : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, ce qui se lit immédiatement sur les coordonnées.

Rédaction attendue. Il ne suffit pas d'écrire « le déterminant est nul » : la conclusion géométrique (« donc les points sont alignés ») fait partie de la réponse.

Réponse. Oui : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$ et $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 3 - Le quatrième sommet

La caractérisation à utiliser, en respectant l'ordre des lettres du contour :

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

— **Coordonnées connues** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 6 - x_D \\ 7 - y_D \end{pmatrix}$.

— **Égalité des coordonnées** :

$$6 - x_D = 4 \quad \text{et} \quad 7 - y_D = 1$$

— D'où $x_D = 2$ et $y_D = 6$: le point cherché est $D(2; 6)$.

Vérification par les diagonales. Le milieu de $[AC]$ est $\left(\frac{1+6}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = (3,5; 4,5)$; celui de $[BD]$ est $\left(\frac{5+2}{2}; \frac{3+6}{2}\right) = (3,5; 4,5)$ ✓ Les diagonales se coupent en leur milieu.

Le piège de l'ordre. Avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on obtiendrait un point différent et un quadrilatère **croisé**.

Réponse. $D(2; 6)$.

Correction de l'exercice 4 - Deux droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont **colinéaires**.

— **Vecteurs** :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

— **Déterminant** :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 4 \times 3 - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$$

— Les vecteurs sont colinéaires : les droites (AB) et (CD) sont **parallèles**.

Sont-elles confondues ? On teste si C appartient à (AB) : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 4 \times 5 - 2 \times 1 = 18 \neq 0$$

Le point C n'est pas sur (AB) : les droites sont **strictement parallèles**.

À retenir. Un déterminant nul ne distingue pas « parallèles » de « confondues » : il faut un test supplémentaire avec un point.

Réponse. Oui, strictement parallèles : $\det = 0$ mais $C \notin (AB)$.

Correction de l'exercice 5 - Le milieu et la symétrie

a) **Formule du milieu** :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = I\left(\frac{-4 + 2}{2}; \frac{1 + 7}{2}\right) = I(-1; 4)$$

— b) **Traduction du symétrique** : A' est tel que B soit le **milieu** de $[AA']$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$.

— $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, donc A' s'obtient en ajoutant ces coordonnées à celles de B :

$$A'(2 + 6; 7 + 6) = A'(8; 13)$$

— **Vérification** : le milieu de $[AA']$ vaut $\left(\frac{-4 + 8}{2}; \frac{1 + 13}{2}\right) = (2; 7)$, soit B ✓

Méthode générale. « Symétrique par rapport à un point » se traduit toujours par une **égalité vectorielle**, jamais par un dessin approximatif.

Réponse. a) $I(-1; 4)$ — b) $A'(8; 13)$.

Correction de l'exercice 6 - Un triangle isocèle ?

On calcule les **carrés** des trois longueurs — plus simple, et suffisant pour comparer.

$$AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad BC^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20 \quad AC^2 = 2^2 + 6^2 = 40$$

— **Deux côtés égaux** : $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: le triangle est **isocèle en B**.

— **Test de l'angle droit** : $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$.

— D'après la **réci-proque du théorème de Pythagore**, le triangle est rectangle en B .

Conclusion. ABC est un triangle **rectangle isocèle en B**.

— **Vérification par le produit scalaire** : $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, dont le produit scalaire vaut $8 - 8 = 0$ ✓

Conseil. On travaille avec les **carrés** des longueurs tant qu'on peut : pas de radicaux, pas d'arrondis, et la comparaison reste valable.

Réponse. Triangle rectangle isocèle en B .

Correction de l'exercice 7 - Reconnaître un losange

Étape 1 — c'est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs sont **égaux**, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Étape 2 — deux côtés consécutifs de même longueur.

— $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$;

$$— AD = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}.$$

Le parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux : c'est un **losange**.

Est-ce un carré ? On teste l'angle en A :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 16 \neq 0$$

L'angle n'est pas droit : ce n'est **pas** un carré.

Le bon ordre de rédaction. Parallélogramme d'abord, propriété supplémentaire ensuite : sans la première étape, l'égalité de deux côtés ne prouve rien.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $AB = AD = \sqrt{20}$: losange non carré.

Correction de l'exercice 8 - Le point d'un segment

Traduction en coordonnées. On calcule d'abord $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc

$$\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

— **Coordonnées de M** : si $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 1 \end{pmatrix}$, alors

$$x_M + 2 = 6 \quad \text{et} \quad y_M - 1 = 6$$

— D'où $M(4; 7)$.

Vérifications.

— M appartient bien à $[AB]$ puisque le coefficient $\frac{3}{4}$ est compris entre 0 et 1 ✓

— $AM = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$ et $AB = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$: le rapport vaut bien $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ✓

Cas particuliers utiles. Le coefficient $\frac{1}{2}$ donne le milieu, $\frac{1}{3}$ le point situé au tiers, et un coefficient supérieur à 1 place le point **au-delà** de B .

Réponse. $M(4; 7)$.

Correction de l'exercice 9 - Chercher une inconnue

Condition d'alignement : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc leur déterminant est nul.

— **Coordonnées** :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} k-2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

— **Déterminant nul** :

$$3 \times 12 - 4 \times (k - 2) = 0$$

— **Résolution** : $36 - 4k + 8 = 0$, soit $44 = 4k$ et

$$k = 11$$

— **Vérification** : avec $k = 11$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \overrightarrow{AB}$ ✓ Les points sont alignés, et C est trois fois plus loin.

Méthode. Toute condition géométrique portant sur un paramètre se traduit par une **équation** : alignement (déterminant nul), orthogonalité (produit scalaire nul), égalité de longueurs (égalité des carrés).

Réponse. $k = 11$.

Correction de l'exercice 10 - Le centre de gravité

a) **Milieu** : $I\left(\frac{6+3}{2}; \frac{0+9}{2}\right) = I(4,5; 4,5)$.

b) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$, donc

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

— Comme A est l'origine, $G(3; 3)$.

— c) **Moyenne des sommets** :

$$\left(\frac{0+6+3}{3}; \frac{0+0+9}{3}\right) = (3; 3)$$

— On retrouve exactement G ✓

La propriété démontrée. Le centre de gravité est toujours situé aux **deux tiers** de chaque médiane en partant du sommet, et ses coordonnées sont la moyenne de celles des trois sommets.

Contrôle supplémentaire. Avec le milieu $J(3; 0)$ de $[AB]$, on a $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ et

$$\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ} \checkmark$$

Réponse. a) $I(4,5; 4,5)$ — b) et c) $G(3; 3)$.

Correction de l'exercice 11 - Décomposer un vecteur

Traduction en système. L'égalité vectorielle équivaut à l'égalité des deux coordonnées :

$$\begin{cases} a + 3b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$$

— De la seconde équation : $b = 2a - 4$. On reporte dans la première :

$$a + 3(2a - 4) = 7 \Leftrightarrow a + 6a - 12 = 7 \Leftrightarrow 7a = 19$$

— Donc $a = \frac{19}{7}$ et $b = 2 \times \frac{19}{7} - 4 = \frac{38 - 28}{7} = \frac{10}{7}$.

— **Vérification de la première coordonnée** : $\frac{19}{7} + 3 \times \frac{10}{7} = \frac{19 + 30}{7} = 7 \checkmark$

— **Vérification de la seconde** : $2 \times \frac{19}{7} - \frac{10}{7} = \frac{28}{7} = 4 \checkmark$

Pourquoi c'est toujours possible ici. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires ($\det = 1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0$) : ils forment une **base** du plan, dans laquelle tout vecteur se décompose d'une seule façon.

Réponse. $a = \frac{19}{7}$ et $b = \frac{10}{7}$.

Correction de l'exercice 12 - Le point équidistant

Mise en équation. Un point de l'axe des abscisses s'écrit $M(x; 0)$.

— **Carrés des distances** :

$$MA^2 = (x - 1)^2 + 4 \quad MB^2 = (x - 7)^2 + 16$$

— **Égalité** $MA = MB$, équivalente à $MA^2 = MB^2$:

$$(x-1)^2 + 4 = (x-7)^2 + 16$$

- **Développement** : $x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 14x + 49 + 16$.
- Les x^2 se **simplifient** : $-2x + 5 = -14x + 65$, donc $12x = 60$ et

$$x = 5$$

— Le point cherché est $M(5; 0)$.

— **Vérification** : $MA^2 = 16 + 4 = 20$ et $MB^2 = 4 + 16 = 20$ ✓

Interprétation. M est le point d'intersection de la **médiatrice** de $[AB]$ avec l'axe des abscisses : passer par les carrés évite les racines et fait disparaître les termes en x^2 .

Réponse. $M(5; 0)$.

Correction de l'exercice 13 - L'aire d'un triangle par les coordonnées

a) **Coordonnées** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 6 \times 5 - 2 \times 2 = 30 - 4 = 26$$

b) **Aire** :

$$S = \frac{|26|}{2} = 13 \text{ unités d'aire}$$

Contrôle par une autre méthode. $AB = \sqrt{40}$, $AC = \sqrt{29}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$, donc

$$\cos \hat{A} = \frac{22}{\sqrt{40}\sqrt{29}} \approx 0,646 \quad \text{et} \quad \sin \hat{A} \approx 0,763$$

L'aire vaut alors $\frac{1}{2} \times \sqrt{40} \times \sqrt{29} \times 0,763 \approx 13$ ✓

Signification du déterminant. Sa valeur absolue est l'aire du **parallélogramme** construit sur les deux vecteurs ; le triangle en occupe la moitié. Un déterminant nul signifie une aire nulle, donc trois points alignés.

Réponse. a) 26 — b) aire = 13 unités d'aire.

Correction de l'exercice 14 - Le plan du skatepark

a) **Longueur** :

$$RS = \sqrt{(16-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

b) **Test d'alignement** : $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{RS}; \overrightarrow{RT}) = 12 \times 10 - 5 \times 6 = 120 - 30 = 90 \neq 0$$

— Le déterminant n'est pas nul : le banc **n'est pas aligné** avec la rampe.

— c) **Milieu** :

$$I\left(\frac{4+16}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = I(10; 4,5)$$

Remarque pratique. Le triplet (5; 12; 13) est un triplet pythagoricien : la longueur tombe juste, ce qui est fréquent dans les énoncés — et un bon indice que le calcul est correct.

— **Contrôle du b)** : le banc est à 10 m horizontalement de R mais à 10 m de hauteur, alors que la rampe ne monte que de 5 m sur 12 m ✓

Réponse. a) 13 m — b) non aligné ($\det = 90$) — c) $I(10 ; 4,5)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un quadrilatère complet

a) **Coordonnées :**

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

— Les vecteurs sont égaux : $ABCD$ est un **parallélogramme**.

— b) $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ et $AD = \sqrt{(1+1)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

— Deux côtés consécutifs égaux : c'est un **losange**.

— c) $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 2 + (-2) \times 4 = 8 - 8 = 0$$

— L'angle en A est **droit** : le losange est un **carré**.

Contrôle par les diagonales. $AC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$ et $BD = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$: les diagonales ont la même longueur, ce qui confirme le carré ✓

La progression à retenir. Parallélogramme, puis losange (côtés), puis carré (angle droit) : chaque propriété s'ajoute à la précédente, jamais toute seule.

Réponse. $ABCD$ est un carré de côté $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.