

Plaquette 2 - Calcul de probabilités binomiales

Loi de Bernoulli et loi binomiale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule de la loi binomiale. Si $X \sim B(n; p)$, alors pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Les trois facteurs se lisent ainsi : $\binom{n}{k}$ compte les **chemins**, p^k pèse les **succès**, $(1 - p)^{n-k}$ pèse les **échecs**.

Traduire les énoncés.

Énoncé	Écriture	Calcul
exactement k	$P(X = k)$	un terme
au plus k	$P(X \leq k)$	somme de 0 à k
moins de k	$P(X \leq k - 1)$	somme de 0 à $k - 1$
au moins k	$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$	complémentaire
plus de k	$P(X \geq k + 1)$	complémentaire

Le réflexe « au moins un » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

Somme des probabilités. Toujours vérifiable :

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

À la calculatrice. Les fonctions *binomFdp* (ou *binompdf*) donnent $P(X = k)$, et *binomFRép* (ou *binomcdf*) donnent $P(X \leq k)$. Un tableur utilise LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; FAUX ou VRAI).

Attention aux arrondis. On conserve au moins quatre décimales dans les calculs intermédiaires, et on arrondit seulement à la fin.

Correction de l'exercice 1 - Appliquer la formule

On applique la formule du cours :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

— **Le coefficient** : $\binom{5}{2} = 10$ (ligne 5 du triangle de Pascal).

— **Le poids des succès** : $p^2 = 0,3^2 = 0,09$.

— **Le poids des échecs** : $(1 - p)^3 = 0,7^3 = 0,343$.

— **Produit** :

$$P(X = 2) = 10 \times 0,09 \times 0,343 = 0,3087$$

Vérification de la structure. Les exposants doivent totaliser n : ici $2 + 3 = 5$ ✓ C'est le contrôle le plus rapide pour repérer une erreur de formule.

Contrôle d'ordre de grandeur. L'espérance vaut $np = 1,5$: les valeurs 1 et 2 doivent être les plus probables, ce qui est cohérent avec une probabilité proche de 0,31 ✓

Réponse. $P(X = 2) = 10 \times 0,09 \times 0,343 = 0,3087$.

Correction de l'exercice 2 - Une loi complète

Les coefficients de la ligne 4 du triangle de Pascal sont 1, 4, 6, 4, 1.

- $P(X = 0) = 1 \times 0,8^4 = 0,4096$;
- $P(X = 1) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 4 \times 0,2 \times 0,512 = 0,4096$;
- $P(X = 2) = 6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536$;
- $P(X = 3) = 4 \times 0,008 \times 0,8 = 0,0256$;
- $P(X = 4) = 1 \times 0,0016 = 0,0016$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Vérification de la somme :

$$0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1$$

Une coïncidence intéressante. $P(X = 0) = P(X = 1)$: c'est propre à ces valeurs de n et p , car $4 \times 0,2 = 0,8$. La loi est très **dissymétrique**, décroissante ensuite : avec p petit, les grandes valeurs sont rares.

Réponse. 0,4096 ; 0,4096 ; 0,1536 ; 0,0256 ; 0,0016, de somme 1.

Correction de l'exercice 3 - Traduire un énoncé

a) $P(X = 4)$: un seul terme.

b) « Au plus 3 » signifie 3 ou moins :

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

c) « Au moins 2 » signifie 2 ou plus. On passe au contraire, qui ne compte que deux termes :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

d) « Plus de 7 » est **strict** : il s'agit de 8, 9 ou 10.

$$P(X > 7) = P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$$

Les deux pièges de vocabulaire.

- « **au moins** k » inclut k ; « **plus de** k » l'exclut ;
- « **au plus** k » inclut k ; « **moins de** k » l'exclut.

Le conseil pratique. Sur une calculatrice, seule la fonction cumulative $P(X \leq k)$ est disponible : toute question doit être ramenée à cette forme, quitte à passer par le complémentaire.

Réponse. a) $P(X = 4)$ — b) $P(X \leq 3)$ — c) $1 - P(X \leq 1)$ — d) $1 - P(X \leq 7)$.

Correction de l'exercice 4 - Au moins une fois

Le nombre X de 6 suit la loi $B\left(8; \frac{1}{6}\right)$.

Le réflexe : « au moins un » se calcule par le **contraire**, « aucun ».

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

— **Calcul de $P(X = 0)$** : un seul chemin, huit échecs consécutifs.

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,2326$$

— **Conclusion** :

$$P(X \geq 1) \approx 1 - 0,2326 = 0,7674$$

Pourquoi ne pas calculer directement ? Il faudrait additionner huit termes ($k = 1$ à 8) au lieu d'un seul : l'événement contraire divise le travail par huit.

Une erreur très répandue. Répondre $8 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{6} > 1$: une probabilité ne dépasse jamais 1. Les chances ne s'additionnent pas, car les lancers peuvent donner plusieurs 6.

Ordre de grandeur. Il faut environ 4 lancers pour dépasser 50 % et 13 lancers pour dépasser 90 %.

Réponse. $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,767$.

Correction de l'exercice 5 - Des probabilités cumulées

Avec $p = 0,5$, chaque chemin a la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$, et la ligne 6 du triangle de Pascal est 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

a) **Cumul jusqu'à 2** :

$$P(X \leq 2) = \frac{1 + 6 + 15}{64} = \frac{22}{64} = 0,34375$$

b) **Événement contraire** :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \frac{22}{64} = \frac{42}{64} = 0,65625$$

Contrôle par la symétrie. Quand $p = 0,5$, la loi est symétrique autour de $\frac{n}{2} = 3$:

$$P(X \leq 2) = P(X \geq 4) = \frac{22}{64}$$

et il reste $P(X = 3) = \frac{20}{64}$ au centre. En effet $\frac{22 + 20 + 22}{64} = 1$ ✓

Le piège. $P(X \geq 3)$ **inclut** la valeur 3 : ce n'est donc pas $P(X \leq 2)$ « de l'autre côté », mais son complémentaire exact.

Réponse. a) $P(X \leq 2) = 0,34375$ — b) $P(X \geq 3) = 0,65625$.

Correction de l'exercice 6 - Le contrôle qualité

Le nombre X de pièces défectueuses suit $B(20; 0,05)$.

a) **Aucune** :

$$P(X = 0) = 0,95^{20} \approx 0,3585$$

b) **Exactement une** :

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0,05 \times 0,95^{19} = 20 \times 0,05 \times 0,3774 \approx 0,3774$$

c) **Au moins deux**, par le contraire :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,3585 - 0,3774 = 0,2641$$

Interprétation industrielle. Dans 36 % des prélèvements, l'échantillon paraît parfait ; dans 26 % des cas, il contient au moins deux pièces défectueuses. Un seul échantillon ne suffit donc pas à juger une production.

Contrôle d'ordre de grandeur. L'espérance vaut $np = 1$: on s'attend à environ une pièce défectueuse par échantillon, ce qui est cohérent avec $P(X = 1)$ maximale ✓

Réponse. a) $\approx 0,3585$ — b) $\approx 0,3774$ — c) $\approx 0,2641$.

Correction de l'exercice 7 - Le joueur de tennis

X suit la loi $B(10; 0,65)$.

a) **Exactement sept réussites :**

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0,65^7 \times 0,35^3$$

$$- \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120 ; 0,65^7 \approx 0,04902 ; 0,35^3 = 0,042875.$$

$$- \text{Produit : } 120 \times 0,04902 \times 0,042875 \approx 0,2522.$$

— b) **Au moins huit :** on additionne les trois derniers termes.

$$P(X = 8) = 45 \times 0,65^8 \times 0,35^2 \approx 0,1757$$

$$P(X = 9) = 10 \times 0,65^9 \times 0,35 \approx 0,0725$$

$$P(X = 10) = 0,65^{10} \approx 0,0135$$

$$- \text{Somme : } P(X \geq 8) \approx 0,1757 + 0,0725 + 0,0135 = 0,2617.$$

Contrôle de cohérence. L'espérance vaut $10 \times 0,65 = 6,5$: les valeurs 6 et 7 sont les plus probables, et $P(X = 7) \approx 0,25$ le confirme ✓

Remarque de méthode. Trois termes se calculent directement ; à partir de quatre, la fonction cumulative de la calculatrice est plus sûre.

Réponse. a) $\approx 0,252$ — b) $\approx 0,262$.

Correction de l'exercice 8 - Deux formulations équivalentes

a) **Différence de deux cumuls :**

$$P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) \approx 0,6488 - 0,3907 = 0,2581$$

b) **Complémentaire :**

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,6488 = 0,3512$$

c) **Intervalle :** on retire le cumul jusqu'à 1.

$$P(2 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) \approx 0,6488 - 0,1584 = 0,4904$$

La règle générale, à connaître :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$$

L'erreur à éviter en c). Retrancher $P(X \leq 2)$ au lieu de $P(X \leq 1)$ ferait disparaître la valeur 2, qui doit pourtant être **incluse**. On écrit toujours $a - 1$ au second cumul.

Contrôle : $P(X = 2) \approx 0,3907 - 0,1584 = 0,2323$, et $0,2323 + 0,2581 = 0,4904$ ✓

Réponse. a) $\approx 0,2581$ — b) $\approx 0,3512$ — c) $\approx 0,4904$.

Correction de l'exercice 9 - La valeur la plus probable

a) Coefficients : 1, 5, 10, 10, 5, 1 ; $p = 0,6$ et $1 - p = 0,4$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

— Détail pour $k = 3$: $10 \times 0,6^3 \times 0,4^2 = 10 \times 0,216 \times 0,16 = 0,3456$.

— **Contrôle** : la somme vaut 1 (à l'arrondi près : $0,0102 + 0,0768 + 0,2304 + 0,3456 + 0,2592 + 0,0778 = 1,0000$) ✓

— b) La valeur la plus probable est $k = 3$, avec 0,3456.

— **Espérance** : $E(X) = np = 5 \times 0,6 = 3$.

Un résultat fréquent. Le **mode** (valeur la plus probable) est ici égal à l'espérance. Ce n'est pas toujours le cas : quand np n'est pas entier, le mode est l'un des deux entiers qui l'encadrent.

Lecture de la forme. La loi est légèrement dissymétrique, étalée vers les petites valeurs : avec $p > 0,5$, la « masse » se déplace vers la droite.

Réponse. b) la valeur 3, égale à l'espérance $np = 3$.

Correction de l'exercice 10 - La garantie du fabricant

Le nombre X de pannes suit $B(15; 0,08)$, et l'on cherche $P(X > 2) = P(X \geq 3)$.

On passe au complémentaire :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

— $P(X = 0) = 0,92^{15} \approx 0,2863$;

— $P(X = 1) = 15 \times 0,08 \times 0,92^{14} \approx 0,3734$;

— $P(X = 2) = 105 \times 0,0064 \times 0,92^{13} \approx 0,2273$.

— **Somme** : $\approx 0,8870$.

$$P(X \geq 3) \approx 1 - 0,8870 = 0,1130$$

Interprétation économique. Environ 11 % des lots sont remplacés : sur 10 000 lots vendus, cela représente 1130 remplacements, un coût que le fabricant doit intégrer à son prix.

Contrôle d'ordre de grandeur. L'espérance vaut $15 \times 0,08 = 1,2$ panne par lot : dépasser 2 pannes est donc un événement minoritaire, ce qui est cohérent ✓

Réponse. $P(X \geq 3) \approx 0,113$, soit environ 11 % des lots.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux tailles d'échantillon

a) **Par le contraire :**

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,9^{10} \approx 1 - 0,3487 = 0,6513$$

b) De même :

$$1 - 0,9^{30} \approx 1 - 0,0424 = 0,9576$$

c) On cherche le plus petit entier n tel que

$$1 - 0,9^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,01$$

— On teste : $0,9^{40} \approx 0,0148$, encore trop grand ; $0,9^{44} \approx 0,0097 < 0,01$ ✓ et $0,9^{43} \approx 0,0108$ ne convient pas.

— Il faut donc 44 **épreuves**.

Ce que ces nombres montrent. Un événement « rare » devient **quasi certain** dès qu'on répète suffisamment : c'est le mécanisme qui explique pourquoi les accidents

improbables finissent par survenir dans les grands systèmes.

Méthode pour le seuil. On tabule les puissances ou l'on programme une boucle « tant que » en Python — trois lignes suffisent.

Réponse. a) $\approx 0,651$ — b) $\approx 0,958$ — c) $n = 44$.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver un paramètre

Expression de $P(X = 0)$. Un seul chemin, n échecs consécutifs :

$$P(X = 0) = (1 - p)^n = 0,8^n$$

— **Équation** : $0,8^n = 0,4096$.

— **Par essais successifs** : $0,8^2 = 0,64$; $0,8^3 = 0,512$; $0,8^4 = 0,4096$ ✓
 $n = 4$

Vérification : avec $n = 4$ et $p = 0,2$, on retrouve bien la loi établie plus haut, dont le premier terme vaut $0,4096$ ✓

Une remarque de calcul. En Première, la résolution se fait par essais ou par lecture d'un tableau de valeurs ; en Terminale, le logarithme donnera directement

$$n = \frac{\ln 0,4096}{\ln 0,8} = 4$$

Contrôle de cohérence. $0,8^n$ **décroît** quand n augmente : si la probabilité cherchée avait été plus petite, il aurait fallu un n plus grand.

Réponse. $n = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Simulation en Python

Lecture du programme, de l'intérieur vers l'extérieur.

- La boucle sur j simule **une** série de 10 épreuves : à chaque tour, *random()* tire un nombre au hasard dans $[0 ; 1[$, et la condition « inférieur à 0,3 » est vraie avec la probabilité 0,3. La variable *succes* compte donc les succès d'une série.
- La condition suivante teste si cette série a donné **au moins** 3 succès ; si oui, le compteur augmente.
- La boucle sur i répète l'expérience N fois.
- Le programme renvoie la **fréquence** des séries à au moins trois succès.

Ce qu'il affiche. Une valeur approchée de $P(X \geq 3)$, d'autant plus proche que N est grand.

Valeur théorique : $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,3828 = 0,6172$. Une simulation avec $N = 10\,000$ donne typiquement une valeur entre 0,608 et 0,627.

Pourquoi ça converge. C'est la loi des grands nombres : la fréquence observée se rapproche de la probabilité théorique quand le nombre de simulations augmente.

Réponse. Il estime $P(X \geq 3) \approx 0,617$ par la fréquence observée sur N simulations.

Correction de l'exercice 14 - Le bug d'arrondi

Première erreur : le coefficient. $\binom{9}{4} = 126$ ✓ — ce point est correct.

Seconde erreur : les arrondis. L'élève a arrondi les puissances **trop tôt et trop grossièrement** :

- $0,45^4 = 0,04100625$, qu'il a remplacé par 0,04 (erreur de 2,5 %) ;

— $0,55^5 = 0,0503284$, remplacé par 0,05.

Calcul correct, en gardant les valeurs complètes :

$$P(X = 4) = 126 \times 0,04100625 \times 0,0503284 \approx 0,2600$$

L'écart entre 0,252 et 0,260 atteint 3 %, ce qui est inacceptable pour une probabilité.

La règle à appliquer. On conserve **toutes** les décimales dans les calculs intermédiaires — idéalement en enchaînant les opérations à la calculatrice sans réécrire — et on n'arrondit **qu'au dernier moment**, au nombre de décimales demandé.

Contrôle d'ordre de grandeur. $np = 4,05$: la valeur 4 est la plus probable, autour de 0,26 ✓

Réponse. Arrondis intermédiaires abusifs ; la valeur correcte est $\approx 0,260$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le dépistage d'un lot

a) Chaque fruit est abîmé ou non, avec la même probabilité, indépendamment des autres :

$$X \sim B(25; 0,12)$$

b) **Formule** :

$$P(X = 3) = \binom{25}{3} \times 0,12^3 \times 0,88^{22}$$

— $\binom{25}{3} = 2300$; $0,12^3 = 0,001728$; $0,88^{22} \approx 0,06035$.

— **Produit** : $2300 \times 0,001728 \times 0,06035 \approx 0,2398$.

— c) **Refus** signifie $X \geq 5$, donc par complémentaire :

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,8091 = 0,1909$$

d) **Prévision** : par linéarité de l'espérance, on attend

$$200 \times 0,1909 \approx 38 \text{ cageots refusés}$$

Contrôle de cohérence. L'espérance vaut $25 \times 0,12 = 3$ fruits abîmés par cageot : le seuil de 5 est au-dessus de la moyenne, donc un refus doit rester minoritaire — 19 % est plausible ✓

Décision commerciale. Refuser près d'un cageot sur cinq est coûteux : soit le grossiste relève son seuil, soit il exige un taux d'avarie inférieur à 12 %.

Réponse. a) $B(25; 0,12)$ — b) $\approx 0,240$ — c) $\approx 0,191$ — d) environ 38 cageots.