

Plaquette 1 - Schéma de Bernoulli

Loi de Bernoulli et loi binomiale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Épreuve de Bernoulli : expérience à **deux issues**, le « succès » (probabilité p) et l'« échec » (probabilité $1 - p$).

Loi de Bernoulli de paramètre p : la variable X vaut 1 en cas de succès, 0 sinon.

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p \quad E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$$

Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**. Les trois conditions à vérifier :

- **1.** deux issues seulement ;
- **2.** même probabilité p à chaque répétition ;
- **3.** répétitions indépendantes.

Loi binomiale. Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , le nombre X de succès suit la loi binomiale, notée

$$X \sim B(n; p)$$

Coefficient binomial. $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès parmi n répétitions.

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Triangle de Pascal. Chaque terme est la somme des deux situés au-dessus :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Avec ou sans remise. Un tirage **avec** remise donne un schéma de Bernoulli ; **sans** remise, les épreuves ne sont plus indépendantes et la loi n'est pas binomiale — sauf si la population est très grande devant l'échantillon.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli n'a que **deux issues** : succès ou échec.

a) **Oui** : succès « obtenir 6 », avec $p = \frac{1}{6}$; échec « ne pas obtenir 6 », avec $\frac{5}{6}$.

b) **Non** : il y a six issues distinctes. On peut toutefois la transformer en épreuve de Bernoulli en choisissant un événement à observer, comme en a).

c) **Oui** : succès « tirer un cœur », avec $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

d) **Non** : trois issues. Elle deviendrait une épreuve de Bernoulli si l'on ne s'intéressait qu'à « utiliser la voiture » ou non.

Ce qu'il faut comprendre. C'est la **question posée** qui définit le succès, pas l'expérience elle-même : la même expérience peut donner lieu à plusieurs épreuves de Bernoulli différentes.

Attention au mot « succès ». Il n'a rien de positif : dans une étude sur les pannes, le « succès » est souvent... la panne.

Réponse. a) et c) oui — b) et d) non (plus de deux issues).

Correction de l'exercice 2 - Les trois conditions

On vérifie les **trois conditions** : deux issues, même probabilité, indépendance.

a) **Oui** : deux issues, $p = 0,5$ à chaque lancer, lancers indépendants. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$.

b) **Non** : sans remise, la composition du jeu **change** à chaque tirage. La probabilité de tirer un cœur n'est plus la même, et les tirages ne sont pas indépendants.

c) **Oui** : avec remise, le jeu est reconstitué à chaque fois, donc $p = \frac{1}{4}$ à chaque tirage, et les tirages sont indépendants.

d) **Non** : la probabilité de succès **diminue** au fil des tirs, la condition « épreuves identiques » n'est pas respectée.

La condition la plus souvent oubliée est l'**indépendance** : elle tombe dès qu'il y a apprentissage, fatigue, ou tirage sans remise.

Une exception pratique. Sonder 1000 personnes sans remise dans une population de 60 millions : les probabilités varient si peu que l'on modélise **quand même** par une loi binomiale.

Réponse. a) et c) oui — b) non (sans remise) — d) non (probabilité variable).

Correction de l'exercice 3 - Une loi de Bernoulli

a) X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p = 0,7$:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0,3	0,7

— **Contrôle** : $0,3 + 0,7 = 1$ ✓

— b) **Espérance** :

$$E(X) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,7 = 0,7 = p$$

— **Variance**, par König-Huygens : $E(X^2) = 0 + 1 \times 0,7 = 0,7$, donc

$$V(X) = 0,7 - 0,49 = 0,21 = p(1 - p)$$

À retenir. Pour une loi de Bernoulli, l'espérance **est** la probabilité de succès. C'est logique : sur un grand nombre de tirs, la proportion de réussites tend vers 0,7.

Remarque. $E(X^2) = E(X)$ car X ne prend que les valeurs 0 et 1, dont les carrés valent 0 et 1 : la variable est inchangée par élévation au carré.

Réponse. a) loi de Bernoulli de paramètre 0,7 — b) $E(X) = 0,7$ et $V(X) = 0,21$.

Correction de l'exercice 4 - Compter les chemins

a) Chaque répétition offre deux branches : l'arbre comporte $2^3 = 8$ chemins, que l'on note avec S (succès) et E (échec).

Nombre de succès	0	1	2	3
Chemins	EEE	SEE, ESE, EES	SSE, SES, ESS	SSS
Nombre de chemins	1	3	3	1

— **Contrôle** : $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ ✓

— b) Trois chemins comportent exactement deux succès :

$$\binom{3}{2} = 3$$

Le sens du coefficient binomial. $\binom{n}{k}$ compte les **façons de placer** k succès parmi n répétitions ; il ne dépend pas de p .

Symétrie. On observe $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$: choisir la place des deux succès revient à choisir celle de l'unique échec. C'est la propriété générale

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Réponse. b) 3 chemins, donc $\binom{3}{2} = 3$.

Correction de l'exercice 5 - Le triangle de Pascal

Chaque ligne commence et finit par 1 ; chaque autre terme est la **somme des deux termes au-dessus** :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

n	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

— **Lecture** : $\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{5}{3} = 10$.

— **Contrôle par la symétrie** : $\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3} \checkmark$

— **Contrôle par la construction** : $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10 \checkmark$

Une propriété utile. La somme d'une ligne vaut 2^n : pour $n = 5$, $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$, ce qui est bien le nombre total de chemins de l'arbre.

Réponse. $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.

Correction de l'exercice 6 - Des coefficients à connaître

On utilise les valeurs particulières et la symétrie.

a) Il y a **un seul** chemin sans aucun succès (que des échecs) et un seul avec sept succès :

$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$$

b) Un seul succès parmi neuf répétitions : il y a 9 places possibles, donc $\binom{9}{1} = 9$. Par symétrie, $\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9$.

c) Par la construction du triangle, ligne 6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Donc

$$\binom{6}{2} = 15$$

— **Contrôle** : $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$ ✓

— d) $\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$.

Les trois réflexes. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; et la symétrie permet toujours de se ramener au plus petit des deux indices.

Réponse. a) 1 et 1 — b) 9 et 9 — c) 15 — d) 10.

Correction de l'exercice 7 - Identifier les paramètres

a) **Oui** : 20 répétitions identiques et indépendantes, deux issues, $p = \frac{1}{6}$.

$$X \sim B\left(20; \frac{1}{6}\right)$$

b) **Non** : le nombre de répétitions n'est **pas fixé à l'avance**, il dépend du hasard. Une loi binomiale exige un nombre n connu.

c) **Oui, en pratique** : les personnes sont interrogées sans remise, mais la ville est très grande devant l'échantillon, donc p reste pratiquement constant.

$$X \sim B(200; 0,3)$$

Les deux paramètres. n est le nombre de **répétitions**, p la probabilité de **succès** d'une seule épreuve. Confondre n et le nombre de succès observés est une erreur classique.

Le cas b) a un nom : c'est un « temps d'attente », modélisé par une loi géométrique, hors programme de Première.

Réponse. a) $B\left(20; \frac{1}{6}\right)$ — b) non — c) $B(200; 0,3)$.

Correction de l'exercice 8 - Un arbre à quatre niveaux

— a) **Vérification des trois conditions** :

- chaque pièce est défectueuse ou non : deux issues ;
- la production est importante, donc le prélèvement de 4 pièces ne modifie pas la proportion : $p = 0,1$ reste constante ;
- les prélèvements sont indépendants.

$$X \sim B(4; 0,1)$$

b) **Aucune défectueuse** signifie quatre succès de l'événement « conforme », de probabilité 0,9 :

$$P(X = 0) = 0,9^4 = 0,6561$$

Le chemin unique. Pour $k = 0$, il n'y a **qu'un seul** chemin dans l'arbre (que des pièces conformes) : c'est pourquoi le coefficient binomial $\binom{4}{0} = 1$ n'apparaît pas.

Interprétation. Près de deux prélèvements sur trois ne contiennent aucune pièce défectueuse ; il reste donc environ 34 % de chances d'en trouver au moins une.

Réponse. a) $X \sim B(4; 0,1)$ — b) $P(X = 0) = 0,6561$.

Correction de l'exercice 9 - Le poids d'un chemin

a) Les répétitions étant **indépendantes**, on multiplie le long du chemin :

$$P = 0,4 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6$$

— On regroupe : trois succès et deux échecs.

$$P = 0,4^3 \times 0,6^2 = 0,064 \times 0,36 = 0,02304$$

— b) **Tous** les chemins comportant trois succès et deux échecs ont exactement cette probabilité, quel que soit l'**ordre** : le produit est le même.

— Leur nombre est

$$\binom{5}{3} = 10$$

— Il y a donc 9 autres chemins de même probabilité.

C'est tout le principe de la formule binomiale. La probabilité d'obtenir exactement k succès s'obtient en multipliant la probabilité **d'un** chemin par le **nombre** de chemins :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^2 = 10 \times 0,02304 = 0,2304$$

Réponse. a) 0,02304 — b) 9 autres, soit $\binom{5}{3} = 10$ chemins au total.

Correction de l'exercice 10 - Avec ou sans remise

a) **Avec remise** : schéma de Bernoulli avec $p = \frac{8}{20} = 0,4$.

$$P = 0,4^3 = 0,064$$

b) **Sans remise** : les probabilités changent à chaque tirage.

$$P = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} = \frac{336}{6840} \approx 0,0491$$

c) La probabilité est **plus faible** sans remise : chaque boule rouge tirée diminue le nombre de rouges restantes, donc les chances suivantes.

L'écart est ici sensible (0,064 contre 0,049, soit 24 % de moins) car l'échantillon (3 boules) n'est pas négligeable devant l'urne (20 boules).

La règle pratique. On approxime le tirage sans remise par une loi binomiale quand l'échantillon représente **moins de 10 %** de la population. Ici il en représente 15 % : l'approximation serait abusive.

Réponse. a) 0,064 — b) $\approx 0,0491$ — c) plus faible sans remise.

Correction de l'exercice 11 - Somme de variables de Bernoulli

Écriture de X . Chaque X_i ajoute 1 au compteur en cas de succès, 0 sinon : le nombre total de succès est donc la **somme** :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Espérance. L'espérance d'une somme est la somme des espérances, et chaque X_i suit la même loi de Bernoulli, d'espérance p :

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + p + \dots + p \quad (n \text{ termes})$$

$$E(X) = np$$

Contrôle sur un exemple. Pour 20 lancers de dé et le succès « obtenir 6 » :

$$E(X) = 20 \times \frac{1}{6} \approx 3,33$$

On s'attend à un peu plus de trois 6 sur vingt lancers, ce qui est cohérent ✓

Ce que la démonstration montre. La formule $E(X) = np$ n'a rien de mystérieux : c'est simplement « n fois la moyenne d'une épreuve ». On la démontrera à nouveau, autrement, au chapitre suivant.

Réponse. $X = X_1 + \dots + X_n$ et $E(X) = np$.

Correction de l'exercice 12 - Le sondage

a) **Les trois conditions** : chaque personne est favorable ou non (2 issues) ; la région est grande devant l'échantillon, donc $p = 0,42$ reste constante ; les personnes sont choisies indépendamment.

$$X \sim B(50; 0,42)$$

b) **Toutes favorables** correspond à un unique chemin :

$$P(X = 50) = 0,42^{50} \approx 1,3 \times 10^{-19}$$

Commentaire. Cette probabilité est **infinitésimale** : un tel résultat ne s'observerait jamais. S'il se produisait, on ne conclurait pas à un coup de chance mais à un **défaut de l'échantillon** — par exemple des personnes interrogées à la sortie d'une réunion de soutien au projet.

C'est le principe de la prise de décision. Quand un résultat observé a une probabilité quasi nulle sous le modèle, on rejette le **modèle**, pas le hasard. Cette idée sera formalisée avec les intervalles de fluctuation.

Réponse. a) $B(50; 0,42)$ — b) $0,42^{50} \approx 1,3 \times 10^{-19}$, quasi impossible.

Correction de l'exercice 13 - Reconnaître le succès

a) Le succès est « être protégé », de probabilité 0,92 :

$$X \sim B(6; 0,92)$$

b) En changeant de point de vue, le succès devient « ne pas être protégé », de probabilité $1 - 0,92 = 0,08$:

$$Y \sim B(6; 0,08)$$

— Comme chaque personne est soit protégée soit non protégée :

$$Y = 6 - X$$

Contrôle par l'espérance. $E(X) = 6 \times 0,92 = 5,52$ et $E(Y) = 6 \times 0,08 = 0,48$; leur somme vaut bien 6 ✓

L'astuce de calcul. Pour trouver $P(X \geq 5)$, il est souvent plus rapide de passer par Y : $P(X \geq 5) = P(Y \leq 1)$, une somme de deux termes au lieu de deux... mais surtout avec des probabilités plus faciles à calculer, car 0,08 est petit.

À retenir. Changer le succès en échec transforme $B(n; p)$ en $B(n; 1 - p)$.

Réponse. a) $B(6; 0,92)$ — b) $B(6; 0,08)$ et $Y = 6 - X$.

Correction de l'exercice 14 - Valeurs possibles et premiers calculs

a) X compte les succès parmi 4 répétitions : elle prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4.

b) Un seul chemin dans chaque cas :

$$P(X = 0) = 0,5^4 = 0,0625 \quad P(X = 4) = 0,5^4 = 0,0625$$

c) Il y a $\binom{4}{2} = 6$ chemins à deux succès, chacun de probabilité $0,5^2 \times 0,5^2 = 0,0625$:

$$P(X = 2) = 6 \times 0,0625 = 0,375$$

Loi complète, par symétrie ($p = 0,5$) :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

— **Contrôle** : la somme vaut 1 ✓ et les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 sont bien la ligne 4 du triangle de Pascal.

Un cas remarquable. Quand $p = 0,5$, tous les chemins ont la même probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n$: la loi ne dépend plus que du **nombre de chemins**.

Réponse. a) de 0 à 4 — b) 0,0625 chacune — c) $P(X = 2) = 0,375$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le questionnaire au hasard

a) Chaque question donne deux issues (juste ou faux), avec la même probabilité $p = \frac{1}{4}$ puisque l'élève répond au hasard, et les questions sont indépendantes.

$$X \sim B\left(5; \frac{1}{4}\right)$$

b) **Aucune bonne réponse** : cinq échecs de suite, chacun de probabilité $\frac{3}{4}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} \approx 0,237$$

c) **Cinq bonnes réponses** :

$$P(X = 5) = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024} \approx 0,001$$

d) Le nombre de façons est le coefficient binomial :

$$\binom{5}{2} = 10$$

Lecture. Répondre au hasard donne environ une chance sur quatre de tout rater, et une chance sur mille de tout réussir. L'espérance vaut $5 \times \frac{1}{4} = 1,25$ bonne réponse : c'est ce qui justifie les barèmes avec points négatifs.

Réponse. a) $B\left(5; \frac{1}{4}\right)$ — b) $\approx 0,237$ — c) $\approx 0,001$ — d) 10.