

Plaque 5 - Problèmes de synthèse : seuils, intervalles de fluctuation et modélisation

Loi de Bernoulli et loi binomiale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi binomiale. $X \sim B(n; p)$ avec

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Seuil en n . Pour que $P(X \geq 1) > \alpha$:

$$(1-p)^n < 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}$$

Seuil en k . On cumule les $P(X = i)$ jusqu'à franchir le seuil voulu — c'est le rôle de la boucle Python ci-dessous.

```
from math import comb

def seuil(n, p, alpha):
    s = 0
    k = 0
    while s <= alpha:
        s = s + comb(n, k) * p**k * (1-p)**(n-k)
        k = k + 1
    return k - 1
```

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % : le plus petit intervalle $[a; b]$ des valeurs de X tel que

$$P(X < a) > 0,025 \quad \text{soit dépassé, et} \quad P(X \leq b) \geq 0,975$$

En pratique, on retient souvent l'approximation

$$[np - 2\sigma; np + 2\sigma] \quad \text{ou, en fréquence,} \quad \left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Prise de décision. Si la fréquence observée **sort** de l'intervalle de fluctuation, on **rejette** l'hypothèse sur p (au risque de 5 % de se tromper) ; sinon on ne peut pas la rejeter — ce qui ne prouve pas qu'elle soit vraie.

Amplitude de l'intervalle en fréquence : de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — pour gagner un facteur 10 en précision, il faut 100 fois plus d'observations.

Correction de l'exercice 1 - Seuil en nombre d'épreuves

— **Inéquation** : $1 - 0,92^n > 0,95$, soit $0,92^n < 0,05$.

— **Logarithme** (avec $\ln 0,92 < 0$, sens inversé) :

$$n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,92} \approx \frac{-2,9957}{-0,083382} \approx 35,93$$

— **Conclusion** : $n \geq 36$ tickets.

— **Vérifications** : $0,92^{35} \approx 0,054022 > 0,05$, donc 35 tickets ne donnent que $P \approx 0,94598 < 0,95$ — insuffisant ✓

- $0,92^{36} \approx 0,049701 < 0,05$, soit $P(X \geq 1) \approx 0,95030 > 0,95$ ✓
- **Réponse : 36 tickets** (avec 37, on atteindrait $P \approx 0,95428$).
- **Espérance de gains** : $36 \times 0,08 = 2,88$ gains attendus — le 0,95 porte bien sur « au moins un », pas sur le nombre.
- **Leçon** : quand le seuil tombe si près d'un entier, le calcul numérique **des deux** valeurs encadrantes est obligatoire.

Réponse. $n = 36$ tickets.

Correction de l'exercice 2 - Seuil en nombre de succès

- **Paramètres** : $E(X) = 10$ et $\sigma(X) = \sqrt{5} \approx 2,2361$.
- **Cumuls** (par symétrie de la loi, on part de 10) :
- $P(X \leq 13) \approx 0,94234$;
- $P(X \leq 14) \approx 0,97931$.
- **Conclusion** : $k = 14$ est le plus petit entier dépassant 0,975.
- **Contrôle** : $P(X \leq 13) \approx 0,942 < 0,975$ ✓ (insuffisant) et $P(X \leq 14) \approx 0,979 \geq 0,975$ ✓
- **Borne basse symétrique** : $P(X \leq 5) \approx 0,020695$ et $P(X \leq 6) \approx 0,057659$, donc la borne inférieure est $a = 6$.
- **Intervalle de fluctuation** : $[6; 14]$, de probabilité $P(6 \leq X \leq 14) \approx 0,97931 - 0,020695 \approx 0,95861$ ✓
- **Approximation par $\pm 2\sigma$** : $[10 - 4,47; 10 + 4,47] \approx [5,5; 14,5]$, soit $[6; 14]$ après arrondi aux entiers ✓ — les deux méthodes concordent.
- **Symétrie** : $14 - 10 = 10 - 6 = 4$ ✓, conséquence de $p = 0,5$.

Réponse. $k = 14$ (intervalle de fluctuation $[6; 14]$).

Correction de l'exercice 3 - Intervalle de fluctuation en fréquence

- **Paramètres** : $p = 0,5$ et $n = 400$, donc σ de la fréquence vaut

$$\frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{400}} = \frac{0,5}{20} = 0,025$$
- **Intervalle ($\pm 2\sigma$)** :

$$[0,5 - 0,05; 0,5 + 0,05] = [0,45; 0,55]$$
- **En effectifs** : entre 180 et 220 piles.
- **Contrôle par l'écart type du nombre** : $\sigma(X) = \sqrt{400 \times 0,25} = 10$, et $2\sigma = 20$ ✓
- **Lecture** : une série donnant 175 piles (fréquence 0,4375) sortirait de l'intervalle — on rejetterait alors l'hypothèse d'équilibre.
- **Une série à 210 piles** (0,525) reste dans l'intervalle : compatible avec l'équilibre ✓
- **Effet de la taille** : avec $n = 10\,000$, l'intervalle serait $[0,49; 0,51]$ — dix fois plus étroit pour vingt-cinq fois plus de lancers ✓
- **Amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{20} = 0,05$, exactement la demi-amplitude trouvée ✓

Réponse. $[0,45; 0,55]$, soit entre 180 et 220 piles.

Correction de l'exercice 4 - Prise de décision

- **Hypothèse** : $p = 0,9$, donc $X \sim B(100; 0,9)$.
- **Paramètres** : $E(X) = 90$ et $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,9 \times 0,1} = \sqrt{9} = 3$.
- **Intervalle de fluctuation ($\pm 2\sigma$)** :

$$[90 - 6; 90 + 6] = [84; 96]$$

- **Observation** : $82 \notin [84; 96]$.
- **Conclusion** : on **rejette** l'affirmation du fabricant au seuil de 95 %.
- **En écarts types** : $\frac{82 - 90}{3} \approx -2,67\sigma$ — un écart nettement au-delà de 2σ ✓
- **Probabilité exacte** : $P(X \leq 82) \approx 0,0100$, soit environ 1 % — l'observation est bien très improbable sous l'hypothèse ✓
- **Prudence** : « rejeter » comporte un risque d'erreur de 5 % ; avec 84 pièces conformes, on n'aurait **pas** pu rejeter, sans pour autant valider le 90 %.
- **Taille d'échantillon** : sur 1000 pièces, $\sigma = \sqrt{90} \approx 9,49$ et l'intervalle serait $[881; 919]$, soit en fréquence $[0,881; 0,919]$ — bien plus discriminant.

Réponse. Oui : $82 \notin [84; 96]$ (écart de $2,67\sigma$, $P(X \leq 82) \approx 0,010$).

Correction de l'exercice 5 - Sondage et marge d'erreur

- **Sous l'hypothèse** $p = 0,5$: σ de la fréquence vaut

$$\frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{1000}} = \frac{0,5}{31,623} \approx 0,015811$$
- **Intervalle** ($\pm 2\sigma$) :

$$[0,5 - 0,031623; 0,5 + 0,031623] \approx [0,4684; 0,5316]$$
- **Observation** : $0,52 \in [0,4684; 0,5316]$.
- **Conclusion** : on **ne peut pas** rejeter l'hypothèse $p = 0,5$ — le résultat est « dans la marge d'erreur ».
- **En écarts types** : $\frac{0,52 - 0,5}{0,015811} \approx 1,265\sigma$ — insuffisant ✓
- **Marge annoncée** : les instituts communiquent ± 3 points pour $n = 1000$, cohérent avec les $\pm 3,16$ points trouvés ✓
- **Taille nécessaire pour conclure** : il faudrait que $0,02 > \frac{2 \times 0,5}{\sqrt{n}}$, soit $\sqrt{n} > 50$ et $n > 2500$ personnes.
- **Vérification** : avec $n = 2500$, la demi-amplitude vaut $\frac{1}{50} = 0,02$ — tout juste à la limite ✓
- **Leçon** : 52 % contre 48 % sur 1000 personnes ne permet **aucune** conclusion, et c'est le message essentiel à retenir face aux sondages électoraux.

Réponse. $[0,468; 0,532]$ contient 0,52 : on ne peut pas rejeter $p = 0,5$.

Correction de l'exercice 6 - Modélisation d'un standard téléphonique

- **Modèle** : $X \sim B(15; 0,7)$, avec $E(X) = 10,5$.
- **Termes** :
- $P(X = 12) = \binom{15}{12} 0,7^{12} \times 0,3^3 = 455 \times 0,013841 \times 0,027 \approx 0,17004$;
- $P(X = 13) = 105 \times 0,0096889 \times 0,09 \approx 0,091561$;
- $P(X = 14) = 15 \times 0,0067822 \times 0,3 \approx 0,030520$;
- $P(X = 15) = 0,7^{15} \approx 0,0047476$.
- **Cumul** :

$$P(X \geq 12) \approx 0,17004 + 0,091561 + 0,030520 + 0,0047476 \approx 0,29687$$
- **Lecture** : environ 29,7 % de chances d'obtenir au moins 12 réponses sur 15 appels.
- **Contrôle par l'espérance** : $E(X) = 10,5$ et $\sigma(X) = \sqrt{15 \times 0,7 \times 0,3} = \sqrt{3,15} \approx 1,7748$.

- **Position de 12** : $\frac{12 - 10,5}{1,7748} \approx 0,845\sigma$ — cohérent avec une probabilité d'environ 30 % au-delà ✓
- **Mode** : $[16 \times 0,7] = 11$, avec $P(X = 11) \approx 0,21862$.
- **Objectif de 12 réponses garanti à 90 %** : il faudrait passer environ 20 appels ($E = 14$, $\sigma \approx 2,05$).

Réponse. $P(X \geq 12) \approx 0,297$.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux échantillons

- **Écart type de la fréquence** : $\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{n}}$.
- **Pour** $n = 100$: $\frac{0,3}{10} = 0,03$, donc l'intervalle est
 $[0,1 - 0,06; 0,1 + 0,06] = [0,04; 0,16]$
- **Pour** $n = 900$: $\frac{0,3}{30} = 0,01$, donc
 $[0,1 - 0,02; 0,1 + 0,02] = [0,08; 0,12]$
- **Comparaison** : l'amplitude passe de 0,12 à 0,04, soit une division par 3 = $\sqrt{\frac{900}{100}}$ ✓
- **En effectifs** : $[4; 16]$ défectueuses sur 100 contre $[72; 108]$ sur 900.
- **Lecture** : sur 100 pièces, un taux observé de 15 % reste compatible avec $p = 0,1$; sur 900 pièces, il conduirait à **rejeter** l'hypothèse ✓
- **Leçon** : un petit échantillon ne permet de détecter que des écarts **grossiers**.
- **Pour détecter un passage de 10 % à 12 %** : il faut que $0,02 > \frac{2 \times 0,3}{\sqrt{n}}$, soit $n > 900$ — exactement la taille du second contrôle ✓

Réponse. $[0,04; 0,16]$ pour $n = 100$ contre $[0,08; 0,12]$ pour $n = 900$.

Correction de l'exercice 8 - Espérance de gain avec une binomiale

- **Modèle** : $X \sim B(10; 0,5)$, avec $E(X) = 5$ et $V(X) = 2,5$.
- **Gain** : $G = 2X - 12$.
- **Espérance** :

$$E(G) = 2 \times 5 - 12 = -2 \text{ €}$$
- **Variance** :

$$V(G) = 4 \times 2,5 = 10$$
- **Écart type** : $\sigma(G) = \sqrt{10} \approx 3,1623 \text{ €}$.
- **Conclusion** : le jeu est **défavorable** de 2 € par partie.
- **Mise d'équité** : $2 \times 5 = 10 \text{ €}$.
- **Probabilité de gagner** : il faut $2X > 12$, soit $X \geq 7$, avec

$$P(X \geq 7) = \frac{120 + 45 + 10 + 1}{1024} = \frac{176}{1024} \approx 0,17188$$
- **Contrôle** : moins d'une chance sur cinq de sortir gagnant ✓
- **Probabilité de perdre** : $X \leq 5$ donne

$$\frac{1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252}{1024} = \frac{638}{1024} \approx 0,62305$$
- **Cas d'égalité** : $X = 6$ donne $G = 0$, avec $\frac{210}{1024} \approx 0,20508$ ✓ — et
 $0,62305 + 0,20508 + 0,17188 = 1$ ✓

Réponse. $E(G) = -2 \text{ €}$ et $\sigma(G) = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 9 - Nombre minimal pour une garantie

— **Condition** : tous en panne a pour probabilité $0,02^n$, et il faut

$$0,02^n < 10^{-6}$$

— **Logarithme** :

$$n > \frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0,02} = \frac{-13,8155}{-3,9120} \approx 3,5316$$

— **Conclusion** : $n \geq 4$ serveurs.

— **Vérifications** : $0,02^3 = 8 \times 10^{-6} > 10^{-6}$ (insuffisant) ✓ et $0,02^4 = 1,6 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ ✓

— **Fiabilité obtenue** : $1 - 1,6 \times 10^{-7} = 0,99999984$ ✓

— **Avec 3 serveurs** : 0,999992 — soit environ 0,69 seconde d'indisponibilité par jour, contre 0,014 seconde avec 4.

— **Contrôle en temps annuel** : $1,6 \times 10^{-7} \times 365 \times 24 \times 3600 \approx 5,05$ secondes de panne par an ✓

— **Indépendance** : ce calcul suppose les pannes **indépendantes**. En pratique, une coupure électrique commune les rendrait dépendantes et ruinerait la garantie — d'où les centres de données géographiquement séparés.

Réponse. 4 serveurs ($0,02^4 = 1,6 \times 10^{-7}$).

Correction de l'exercice 10 - Loi binomiale et symétrie

— **Calcul** : $P(X = k) = \binom{n}{k} 0,5^k \times 0,5^{n-k} = \binom{n}{k} 0,5^n$.

— **De même** : $P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} 0,5^n$.

— **Égalité des coefficients** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, donc

$$P(X = k) = P(X = n - k)$$

— **Interprétation** : avec une pièce équilibrée, « k piles » est aussi probable que « k faces », par symétrie des deux issues ✓

— **Illustration pour $n = 8$** : les probabilités sont $\frac{1}{256}, \frac{8}{256}, \frac{28}{256}, \frac{56}{256}, \frac{70}{256}, \frac{56}{256}, \frac{28}{256}, \frac{8}{256}, \frac{1}{256}$.

— **Contrôle de la somme** : $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256 = 2^8$ ✓

— **Symétrie visible** : $P(X = 2) = P(X = 6) = \frac{28}{256} \approx 0,10938$ ✓

— **Mode** : $k = 4$, avec $\frac{70}{256} \approx 0,27344$ — exactement l'espérance ✓

— **Conséquence** : $P(X \leq 3) = P(X \geq 5) = \frac{1 + 8 + 28 + 56}{256} = \frac{93}{256} \approx 0,36328$, et il reste $P(X = 4)$ au milieu.

— **Perte de la symétrie** : dès que $p \neq 0,5$, l'égalité tombe — pour $p = 0,3$ et $n = 8$, $P(X = 2) \approx 0,29648$ mais $P(X = 6) \approx 0,010002$.

Réponse. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ donne la symétrie ; pour $n = 8$, $P(X = 2) = P(X = 6) = \frac{28}{256}$.

Correction de l'exercice 11 - Contrôle à deux niveaux

Pour $p = 0,05$.

- $P(X = 0) = 0,95^{10} \approx 0,59874$;
- $P(X = 1) = 10 \times 0,05 \times 0,95^9 = 0,5 \times 0,63025 \approx 0,31512$.
 $P(X \leq 1) \approx 0,91386$

Pour $p = 0,25$.

- $P(X = 0) = 0,75^{10} \approx 0,056314$;
- $P(X = 1) = 10 \times 0,25 \times 0,75^9 = 2,5 \times 0,075085 \approx 0,18771$.
 $P(X \leq 1) \approx 0,24402$
- **Risque du producteur** : $1 - 0,91386 \approx 8,6\%$ de bons lots rejetés — acceptable.
- **Risque du client** : $24,4\%$ de mauvais lots acceptés — élevé.
- **Comparaison avec un prélèvement de 20 pièces** (même critère) : pour $p = 0,05$, $P(X \leq 1) \approx 0,73584$; pour $p = 0,25$, $\approx 0,024313$.
- **Lecture** : doubler l'échantillon fait chuter le risque client de $24,4\%$ à $2,4\%$, mais triple le risque producteur ($8,6\% \rightarrow 26,4\%$) ✓
- **Le bon réglage** : augmenter **à la fois** la taille de l'échantillon et le seuil d'acceptation. Avec 20 pièces et « au plus 3 défectueuses », on obtient $0,98410$ pour $p = 0,05$ et $0,22515$ pour $p = 0,25$ — mieux pour le producteur, comparable pour le client.
- **Espérances** : $0,5$ défectueuse attendue pour $p = 0,05$ contre $2,5$ pour $p = 0,25$ — c'est cet écart que le contrôle doit détecter ✓

Réponse. $\approx 0,914$ pour $p = 0,05$ et $\approx 0,244$ pour $p = 0,25$.

Correction de l'exercice 12 - Script de calcul de seuil

- **Fonctionnement** : la boucle cumule $P(X = 0) + P(X = 1) + \dots$ jusqu'à dépasser $0,025$, puis affiche le dernier indice ajouté.
- **Paramètres** : $E(X) = 12$ et $\sigma(X) = \sqrt{30 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{7,2} \approx 2,6833$.
- **Cumuls** :
 - $P(X \leq 6) \approx 0,017183$ (encore sous le seuil) ;
 - $P(X \leq 7) \approx 0,043524$ (dépassement).
- **Affichage** : la boucle s'arrête avec $k = 8$, donc le script affiche 7.
- **Interprétation** : 7 est la **borne inférieure** de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% .
- **Borne supérieure** : en cumulant jusqu'à $0,975$, on trouve $P(X \leq 16) \approx 0,95189$ et $P(X \leq 17) \approx 0,97876$, donc $b = 17$.
- **Intervalle** : $[7; 17]$, de probabilité $\approx 0,97876 - 0,017183 \approx 0,96158$ ✓
- **Contrôle par $\pm 2\sigma$** : $[12 - 5,37; 12 + 5,37] \approx [6,6; 17,4]$, soit $[7; 17]$ après arrondi aux entiers intérieurs ✓
- ***Attention au k-1*** : la boucle incrémente k après** l'ajout, d'où la correction finale — une erreur d'un cran très fréquente.

Réponse. Il affiche 7 (borne inférieure de l'intervalle de fluctuation).

Correction de l'exercice 13 - Choix entre deux hypothèses

- **Sous $p = 0,3$** :

$$P(X = 5) = 252 \times 0,00243 \times 0,16807 \approx 0,10292$$
- **Sous $p = 0,6$** :

$$P(X = 5) = 252 \times 0,07776 \times 0,01024 \approx 0,20066$$

- **Rapport de vraisemblance** : $\frac{0,20066}{0,10292} \approx 1,95$.
- **Conclusion** : l'hypothèse $p = 0,6$ est environ **deux fois** plus vraisemblable — mais l'écart est **faible**, la conclusion reste fragile.
- **Espérances** : 3 sous la première hypothèse, 6 sous la seconde ; l'observation 5 est presque à mi-chemin ✓
- **En écarts types** : $\sigma_1 = \sqrt{2,1} \approx 1,449$ et $\sigma_2 = \sqrt{2,4} \approx 1,549$.
- 5 est à $1,38\sigma_1$ de 3 et à $-0,65\sigma_2$ de 6 — nettement plus proche de la seconde ✓
- **Avec un échantillon de 100 boules et 50 rouges** : les espérances seraient 30 et 60, avec $\sigma \approx 4,58$ et $4,90$; 50 serait à $4,4\sigma$ de 30 et à $-2,04\sigma$ de 60 — la conclusion serait bien plus nette, sans être certaine.
- **Leçon** : un petit échantillon ne permet pas de trancher entre deux hypothèses proches.

Réponse. $p = 0,6$ (0,201 contre 0,103), mais avec un rapport de seulement 1,95.

Correction de l'exercice 14 - Effectif attendu et fluctuation

- **Modèle** : $X \sim B(30; 0,1)$.
- **Espérance** : $E(X) = 3$ gauchers attendus.
- **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{30 \times 0,1 \times 0,9} = \sqrt{2,7} \approx 1,6432$.
- **Intervalle approché** ($\pm 2\sigma$) : $[3 - 3,29; 3 + 3,29] \approx [-0,29; 6,29]$, soit $[0; 6]$ après troncature aux valeurs possibles.
- **Contrôle par les cumuls** : $P(X \leq 6) \approx 0,97417$ et $P(X = 0) \approx 0,042391$.
- **Intervalle retenu** : $[0; 6]$, de probabilité $\approx 0,97417$ ✓
- **Lecture** : une classe de 30 élèves comptera presque toujours entre 0 et 6 gauchers — une classe à 8 gauchers serait inhabituelle ($P(X \geq 8) \approx 0,0078$).
- **Asymétrie** : l'intervalle est **tronqué à gauche** (on ne peut pas descendre sous 0), ce qui rend l'approximation $\pm 2\sigma$ inadaptée pour les petites valeurs de np .
- **Mode** : $[31 \times 0,1] = 3$, avec $P(X = 3) \approx 0,23609$ ✓
- **Sur 300 élèves** : $E = 30$ et $\sigma \approx 5,20$, donc $[19,6; 40,4]$ — l'intervalle relatif se resserre ✓

Réponse. 3 gauchers attendus, intervalle $[0; 6]$ ($\sigma \approx 1,64$).

Correction de l'exercice 15 - Comparaison binomiale et fréquence

- **Formules** : $\sigma(X) = \sqrt{0,25n} = 0,5\sqrt{n}$ et $\sigma\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{0,5}{\sqrt{n}}$.
- **Pour** $n = 100$: $\sigma(X) = 5$ et $\sigma(F) = 0,05$.
- **Pour** $n = 10\,000$: $\sigma(X) = 50$ et $\sigma(F) = 0,005$.
- **Observation capitale** : quand n est multiplié par 100,
- l'écart type du **nombre** est multiplié par 10 (il **augmente**) ;
- l'écart type de la **fréquence** est divisé par 10 (elle **se concentre**).
- **Résolution du paradoxe apparent** : le nombre de piles s'écarte de plus en plus de $\frac{n}{2}$ en valeur absolue, mais de moins en moins en **proportion** ✓
- **Contrôles** : $\frac{5}{100} = 0,05$ ✓ et $\frac{50}{10\,000} = 0,005$ ✓
- **Intervalles** : $[45; 55]$ piles sur 100 ($[0,45; 0,55]$) contre $[4900; 5100]$ sur 10 000 ($[0,49; 0,51]$).
- **Loi des grands nombres** : c'est exactement ce phénomène qu'elle décrit — la **fréquence** converge, pas l'effectif.

- **Erreur d'interprétation classique** : croire qu'après une série de faces, les piles « doivent » rattraper leur retard. L'écart absolu tend au contraire à **croître** ; seule la proportion se stabilise.

Réponse. $\sigma(X)$ croît en $\sqrt{n}$ (5 puis 50) ; $\sigma(F)$ décroît en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (0,05 puis 0,005).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : campagne de dépistage

a) **Probabilité d'un test positif** :

$$P(T) = 0,04 \times 0,92 + 0,96 \times 0,06 = 0,0368 + 0,0576 = 0,0944$$

- **Nombre attendu** : $500 \times 0,0944 = 47,2$ tests positifs.

b) **Valeur prédictive positive** :

$$P_T(M) = \frac{0,0368}{0,0944} \approx 0,38983$$

- Environ 39 % des positifs sont réellement malades.
- **Contrôle** : les faux positifs (0,0576) dépassent les vrais (0,0368), car les non-malades sont 24 fois plus nombreux ✓

c) **Faux positifs.** Chaque personne est un faux positif avec la probabilité 0,0576, donc $Y \sim B(500; 0,0576)$.

$$E(Y) = 500 \times 0,0576 = 28,8 \quad \sigma(Y) = \sqrt{500 \times 0,0576 \times 0,9424} \approx 5,2098$$

- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[28,8 - 10,42; 28,8 + 10,42] \approx [18,4; 39,2]$, soit environ $[19; 39]$ faux positifs.
- **Vrais positifs** : $E = 500 \times 0,0368 = 18,4$ avec $\sigma \approx 4,21$, soit un intervalle d'environ $[10; 27]$.
- **Contrôle** : $28,8 + 18,4 = 47,2$ ✓ — cohérent avec la question a).
- **Malades non détectés** : $500 \times 0,04 \times 0,08 = 1,6$ personne en moyenne — c'est le coût humain des faux négatifs.
- **Conclusion de santé publique** : sur 500 personnes, il faudra refaire un test de confirmation à une cinquantaine de personnes, dont une trentaine pour rien. Un second test indépendant porterait la valeur prédictive à

$$\frac{0,04 \times 0,92^2}{0,04 \times 0,92^2 + 0,96 \times 0,06^2} = \frac{0,033856}{0,033856 + 0,003456} \approx 0,90738$$

- soit plus de 90 % ✓ — c'est toute la logique du dépistage en deux étapes.

Réponse. a) 47,2 positifs · b) $\approx 0,390$ · c) $E(Y) = 28,8$, $\sigma \approx 5,21$, intervalle $[19; 39]$.