

Plaquette 3 - Espérance et variance

Loi de Bernoulli et loi binomiale — Première spé maths

Exercices

Méthode

Deux formules tiennent tout le chapitre : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$. On apprend à les appliquer, à les interpréter — combien de succès en moyenne, avec quelle fluctuation —, à retrouver un paramètre manquant, et à s'en servir pour décider si un résultat observé est surprenant.

Exercice 1 - Appliquer les deux formules

Soit $X \sim B(50; 0,2)$.

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, arrondi au centième.

Exercice 2 - Combien de six en moyenne ?

On lance 60 fois un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus.

a) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

b) Entre quelles valeurs le nombre de 6 se situe-t-il « habituellement », à deux écarts types près ?

Exercice 3 - Retrouver le nombre de répétitions

Soit $X \sim B(n; 0,25)$ avec $E(X) = 12$.

Déterminer n , puis calculer $\sigma(X)$.

Exercice 4 - Retrouver les deux paramètres

Soit $X \sim B(n; p)$ avec $E(X) = 24$ et $V(X) = 14,4$.

Déterminer n et p .

Exercice 5 - La fréquence de succès

Un sondage porte sur $n = 400$ personnes, dont une proportion $p = 0,35$ est favorable. On note X le nombre de personnes favorables et $F = \frac{X}{400}$ la fréquence observée.

a) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

b) En déduire $E(F)$ et $\sigma(F)$.

Exercice 6 - Quand la variance est-elle maximale ?

Soit $X \sim B(100; p)$.

a) Exprimer $V(X)$ en fonction de p .

b) Pour quelle valeur de p la variance est-elle maximale ? Combien vaut-elle alors ?

Exercice 7 - Le stand de tir revisité

Un tireur touche la cible avec une probabilité de 0,75. Il tire 40 fois.

- Combien de cibles touche-t-il en moyenne ?
- Calculer l'écart type du nombre de cibles touchées.
- Toucher 22 cibles serait-il surprenant ?

Exercice 8 - Comparer deux tailles d'échantillon

Un événement a une probabilité $p = 0,5$. On l'observe sur $n = 100$ puis sur $n = 10\,000$ répétitions.

- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ dans les deux cas.
- Comparer les fluctuations **relatives**.

Exercice 9 - La démonstration des formules

Soit $X \sim B(3; p)$.

- Établir la loi de X en fonction de p .
- Calculer $E(X)$ et vérifier qu'elle vaut $3p$.

Exercice 10 - Le budget de l'assureur

Un assureur couvre 2000 clients. Chacun déclare un sinistre dans l'année avec une probabilité de 0,03, indépendamment des autres. Chaque sinistre coûte 1500 €.

- Calculer l'espérance et l'écart type du nombre X de sinistres.
- Quel budget l'assureur doit-il prévoir pour couvrir les sinistres dans 95 % des cas environ (soit $E(X) + 2\sigma$) ?

Exercice 11 - Un résultat est-il plausible ?

Un fabricant affirme que 90 % de ses pièces sont conformes. Un client teste 200 pièces et en trouve 169 conformes.

Ce résultat est-il compatible avec l'affirmation du fabricant ?

Exercice 12 - Espérance d'un gain binomial

Un jeu consiste à lancer 5 fois une pièce équilibrée. Le joueur gagne 3 € par pile obtenu, et la partie coûte 8 €.

Calculer l'espérance du gain algébrique.

Exercice 13 - Deux productions comparées

L'atelier A produit 500 pièces avec un taux de défaut de 2 % ; l'atelier B en produit 2000 avec un taux de 1 %.

- Calculer l'espérance et l'écart type du nombre de pièces défectueuses dans chaque atelier.
- Lequel produit le plus de pièces défectueuses en moyenne ? Lequel est le plus

régulier, relativement à sa production ?

Exercice 14 – Choisir la taille de l'échantillon

On veut estimer une proportion p voisine de 0,5 avec un écart type de la fréquence inférieur à 0,01.

Quelle taille d'échantillon faut-il ?

Exercice 15 – Synthèse : la chaîne d'embouteillage

Une chaîne remplit 1200 bouteilles par heure. Une bouteille est mal bouchée avec une probabilité de 0,015, indépendamment des autres.

- Donner la loi du nombre X de bouteilles mal bouchées en une heure.
- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- Le service qualité s'inquiète si X dépasse 30. Cet écart est-il significatif ?
- Quel gain obtiendrait-on en ramenant le taux à 0,01 ?