

## Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : seuils, intervalles de fluctuation et modélisation

### Loi de Bernoulli et loi binomiale — Première spé maths

#### Exercices

#### Méthode

On cherche des **seuils** ( $n$  minimal,  $k$  minimal), on construit un **intervalle de fluctuation** pour décider d'une hypothèse, et l'on modélise des situations concrètes par une loi binomiale.

#### Exercice 1 – Seuil en nombre d'épreuves

Un jeu de grattage offre une chance de gain de 0,08. Combien de tickets faut-il acheter pour gagner au moins une fois avec une probabilité dépassant 0,95 ?

#### Exercice 2 – Seuil en nombre de succès

Soit  $X \sim B(20; 0,5)$ . Déterminer le plus petit entier  $k$  tel que  $P(X \leq k) \geq 0,975$ .

#### Exercice 3 – Intervalle de fluctuation en fréquence

Une pièce est supposée équilibrée. On la lance 400 fois. Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence de « pile » au seuil de 95 %.

#### Exercice 4 – Prise de décision

Un fabricant affirme que 90 % de ses pièces sont conformes. Sur 100 pièces, on en trouve 82 conformes. Peut-on rejeter son affirmation au seuil de 95 % ?

#### Exercice 5 – Sondage et marge d'erreur

Un sondage sur 1000 personnes donne 52 % d'intentions favorables. Déterminer l'intervalle de fluctuation associé à  $p = 0,5$  et conclure.

#### Exercice 6 – Modélisation d'un standard téléphonique

Chaque appel aboutit avec la probabilité 0,7. Un télévendeur passe 15 appels. Calculer la probabilité qu'il obtienne au moins 12 réponses.

#### Exercice 7 – Comparer deux échantillons

Deux contrôles portent sur  $p = 0,1$  : l'un sur 100 pièces, l'autre sur 900. Comparer les intervalles de fluctuation en fréquence.

#### Exercice 8 – Espérance de gain avec une binomiale

On lance 10 fois une pièce équilibrée. On gagne 2 € par pile et l'on paie 12 € pour jouer. Calculer l'espérance et l'écart type du gain.

**Exercice 9 - Nombre minimal pour une garantie**

Un serveur tombe en panne avec la probabilité 0,02 par jour. Combien de serveurs redondants faut-il pour que la probabilité qu'au moins un fonctionne dépasse 0,999999 ?

**Exercice 10 - Loi binomiale et symétrie**

Montrer que pour  $X \sim B(n; 0,5)$ , on a  $P(X = k) = P(X = n - k)$ . Illustrer avec  $n = 8$ .

**Exercice 11 - Contrôle à deux niveaux**

Un lot est accepté si sur 10 pièces prélevées on trouve au plus une défectueuse. Calculer la probabilité d'acceptation pour  $p = 0,05$ , puis pour  $p = 0,25$ .

**Exercice 12 - Script de calcul de seuil**

Ce script détermine un seuil. Qu'affiche-t-il pour  $n = 30$ ,  $p = 0,4$  et  $\alpha = 0,025$  ?

```
from math import comb

n, p, alpha = 30, 0.4, 0.025
s = 0
k = 0
while s <= alpha:
    s = s + comb(n, k) * p**k * (1-p)**(n-k)
    k = k + 1
print(k - 1)
```

**Exercice 13 - Choix entre deux hypothèses**

Une urne contient soit 30 %, soit 60 % de boules rouges. On tire 10 boules avec remise et l'on obtient 5 rouges. Quelle hypothèse retenir ?

**Exercice 14 - Effectif attendu et fluctuation**

Dans une population, 10 % des personnes écrivent de la main gauche. Sur une classe de 30 élèves, quel est le nombre attendu de gauchers et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % ?

**Exercice 15 - Comparaison binomiale et fréquence**

Pour  $X \sim B(n; 0,5)$ , comparer  $\sigma(X)$  et  $\sigma\left(\frac{X}{n}\right)$  pour  $n = 100$  puis  $n = 10\,000$ .

**Exercice 16 - Synthèse : campagne de dépistage**

Un test de dépistage est appliqué à 500 personnes dont 4 % sont malades. Le test est positif chez 92 % des malades et 6 % des non-malades.

- Calculer le nombre attendu de tests positifs.
- Calculer la probabilité qu'un positif soit malade.

c) Calculer l'espérance et l'écart type du nombre de faux positifs, et l'intervalle de fluctuation associé.