

Plaquette 2 - Discriminant et résolution du second degré

Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le discriminant. Pour $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

— $\Delta > 0$: deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

— $\Delta < 0$: aucune racine réelle.

Contrôle systématique.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Simplifier un radical. On extrait le plus grand carré parfait :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \quad \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Avant de calculer Δ , toujours :

- ramener l'équation à la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (tout d'un côté, développé et réduit) ;
- chercher une factorisation évidente, qui irait plus vite ;
- multiplier par un entier pour éliminer les fractions ou les décimaux.

Interprétation graphique. Le signe de Δ indique le nombre de points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses : deux, un, ou aucun.

Correction de l'exercice 1 - Calculer quatre discriminants

On applique la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

a) $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$: deux racines.

b) $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$: deux racines.

c) $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0$: une racine double.

d) $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23 < 0$: aucune racine réelle.

Attention aux signes. En c), $-4ac = -4 \times (-1) \times (-4)$: deux signes moins parmi les facteurs donnent un produit **négatif**. C'est l'erreur la plus fréquente.

Réponse. a) 49, 2 racines — b) 1, 2 racines — c) 0, 1 racine double — d) -23, aucune.

Correction de l'exercice 2 - Deux racines entières

— **Discriminant** : $\Delta = 9 + 40 = 49 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 7$.

— **Racines** :

$$x_1 = \frac{-3 - 7}{2} = -5 \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

- **Contrôle par la somme** : $-5 + 2 = -3$ et $-\frac{b}{a} = -3$ ✓
 - **Contrôle par le produit** : $-5 \times 2 = -10$ et $\frac{c}{a} = -10$ ✓
- $$S = \{-5; 2\}$$

Remarque. Les racines étant entières, on pouvait les trouver à vue : deux nombres de somme -3 et de produit -10 . Le discriminant reste la méthode sûre quand rien ne se voit.

Réponse. $S = \{-5; 2\}$.

Correction de l'exercice 3 - Une racine fractionnaire

- **Discriminant** : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 1$.
- **Racines** :

$$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

- **Forme factorisée** : avec $a = 3$,

$$3x^2 - 5x + 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1) = (3x - 2)(x - 1)$$

- **Contrôle** : $(3x - 2)(x - 1) = 3x^2 - 3x - 2x + 2 = 3x^2 - 5x + 2$ ✓

Simplification à ne pas oublier. $\frac{4}{6}$ doit être réduit en $\frac{2}{3}$; et faire entrer le 3 dans la parenthèse donne une factorisation à coefficients entiers, plus lisible.

Réponse. $S = \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$ et $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Discriminant nul

- **Discriminant** : $\Delta = 16 - 16 = 0$: il y a une **racine double**.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

- **Forme factorisée** : $-x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x - 2)^2$.

- **Contrôle** : $-(x - 2)^2 = -(x^2 - 4x + 4) = -x^2 + 4x - 4$ ✓

$$S = \{2\}$$

Interprétation. La parabole, tournée vers le bas puisque $a < 0$, a son sommet **exactement sur** l'axe des abscisses, au point $(2; 0)$. Le trinôme est donc négatif ou nul partout.

Réponse. $S = \{2\}$ (racine double) et $-x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$.

Correction de l'exercice 5 - Quand il n'y a pas de solution

- **Discriminant** : $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$.
- Un discriminant strictement négatif signifie qu'**aucun réel** n'annule le trinôme :

$$S = \emptyset$$

Signe. Sans racine, le trinôme ne change jamais de signe : il garde celui de $a = 2 > 0$. Donc $2x^2 + x + 3 > 0$ pour tout réel x .

Vérification par la forme canonique : $\alpha = -\frac{1}{4}$ et

$$\beta = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} + 3 = \frac{23}{8}$$

d'où $2x^2 + x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq \frac{23}{8} > 0 \checkmark$

Réponse. $S = \emptyset$; le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 - Des racines avec un radical

- **Discriminant** : $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$.
- **Simplification du radical** : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$.
- **Racines** :

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

- Valeurs exactes : $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
- Valeurs approchées : $\sqrt{3} \approx 1,732$, donc $x_1 \approx 0,27$ et $x_2 \approx 3,73$.
- **Contrôle par la somme** : $(2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) = 4 = -\frac{b}{a} \checkmark$
- **Contrôle par le produit** : $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 = \frac{c}{a} \checkmark$

Simplification obligatoire. Écrire $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$ sans simplifier n'est pas faux, mais une réponse se rend sous sa forme la plus simple : on factorise le numérateur par 2.

Réponse. $S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\} \approx \{0,27; 3,73\}$.

Correction de l'exercice 7 - Réduire avant de résoudre

Piège d'entrée. Le second membre n'est pas nul : la règle du produit nul **ne s'applique pas**. On développe et on ramène tout à gauche.

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$$

- L'équation devient $x^2 - x - 2 = 4$, soit $x^2 - x - 6 = 0$.
 - **Discriminant** : $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 5$.
 - **Racines** : $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$.
 - **Vérification dans l'équation de départ** : $(-1) \times (-4) = 4 \checkmark$ et $4 \times 1 = 4 \checkmark$
- $$S = \{-2; 3\}$$

Erreur à ne jamais commettre : écrire « $x + 1 = 4$ ou $x - 2 = 4$ ». Un produit qui vaut 4 ne dit rien sur chacun de ses facteurs.

Réponse. $S = \{-2; 3\}$.

Correction de l'exercice 8 - Quelle méthode choisir ?

- Facteur commun** : $x(x - 7) = 0$, donc $S = \{0; 7\}$.
- Identité remarquable** : $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$, donc $S = \{-7; 7\}$.
- Produit nul**, l'équation est déjà factorisée : $S = \left\{-\frac{5}{2}; 1\right\}$.
- Aucune factorisation évidente : **discriminant**.

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 49 + 32 = 81$$

- $\sqrt{81} = 9$, donc $x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4$ et $x_2 = \frac{-7+9}{4} = \frac{1}{2}$.

— **Contrôle** : $-4 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} = -\frac{b}{a}$ ✓ et $-4 \times \frac{1}{2} = -2 = \frac{c}{a}$ ✓

Réflexe. Le discriminant fonctionne toujours, mais il est rarement le plus rapide : on regarde d'abord si un terme manque ou si une identité apparaît.

Réponse. a) facteur commun — b) identité — c) produit nul — d) discriminant,
 $S = \left\{-4; \frac{1}{2}\right\}$.

Correction de l'exercice 9 - Valeurs exactes ou approchées ?

— **Discriminant** : $\Delta = 36 - 28 = 8 > 0$.

— $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

— **Racines** :

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

— **Encadrement** : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, donc :

— $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ vérifie $1,58 < x_1 < 1,59$, d'où $1 < x_1 < 2$;

— $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ vérifie $4,41 < x_2 < 4,42$, d'où $4 < x_2 < 5$.

— **Contrôle par le produit** : $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 = \frac{c}{a}$ ✓

À retenir. On ne remplace une valeur exacte par une valeur approchée qu'à la **toute fin**, et seulement si l'énoncé le demande : arrondir en cours de calcul fausse les contrôles.

Réponse. $S = \{3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}$, avec $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$ et $4 < 3 + \sqrt{2} < 5$.

Correction de l'exercice 10 - Contrôler par la somme et le produit

— **Discriminant** : $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 3$.

— **Racines** :

$$x_1 = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad x_2 = \frac{7+3}{10} = 1$$

— **Contrôle par la somme** :

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{a} = \frac{7}{5}$$

Les deux valeurs coïncident ✓

— **Contrôle par le produit** : $\frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$ et $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$ ✓

— **Racine évidente** : on pouvait remarquer que $5 - 7 + 2 = 0$, donc 1 est racine ; l'autre s'obtient alors par le produit, $\frac{2}{5}$.

Astuce à retenir. Si $a + b + c = 0$, alors 1 est toujours racine du trinôme.

Réponse. $S = \left\{\frac{2}{5}; 1\right\}$.

Correction de l'exercice 11 - Un paramètre au premier plan

Attention au degré. Si $m = 0$, l'équation devient $-4x + 1 = 0$: elle est du premier degré et n'a qu'une solution, $x = \frac{1}{4}$. On suppose donc $m \neq 0$.

— **Discriminant** :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times m \times 1 = 16 - 4m$$

— Deux solutions distinctes exigent $\Delta > 0$:

$$16 - 4m > 0 \Leftrightarrow 4m < 16 \Leftrightarrow m < 4$$

— En tenant compte de la condition $m \neq 0$:

$$m \in]-\infty; 0[\cup]0; 4[$$

— **Contrôle avec** $m = 1$: $x^2 - 4x + 1 = 0$ a pour discriminant $12 > 0$ ✓

— **Contrôle avec** $m = 4$: $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ n'a qu'une racine double ✓

Le réflexe. Dès qu'un paramètre occupe la place de a , on traite **à part** le cas où il est nul.

Réponse. $m \in]-\infty; 0[\cup]0; 4[$.

Correction de l'exercice 12 - Une parabole qui évite l'axe

Intersection avec l'axe des abscisses. Ces points ont pour ordonnée 0 : on résout $f(x) = 0$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Aucune racine réelle : la courbe **ne coupe pas** l'axe des abscisses.

Le point le plus proche est le sommet, puisque $a = 1 > 0$:

$$\alpha = \frac{4}{2} = 2 \quad \beta = f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$$

— Le sommet est $S(2; 1)$: la courbe passe au minimum à 1 unité au-dessus de l'axe.

— **Forme canonique** : $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, qui rend la conclusion immédiate puisque $(x - 2)^2 \geq 0$.

— **Contrôle** : $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$ ✓

Réponse. $\Delta = -4 < 0$: aucune intersection ; point le plus proche $S(2; 1)$.

Correction de l'exercice 13 - Le triangle rectangle de 13 cm

— **Inconnue** : x le plus petit côté de l'angle droit, en centimètres, avec $x > 0$. L'autre mesure $x + 7$.

— **Théorème de Pythagore** dans le triangle rectangle :

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$$

— On développe : $x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$, soit $2x^2 + 14x - 120 = 0$.

— On divise par 2 : $x^2 + 7x - 60 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 49 + 240 = 289$, et $\sqrt{289} = 17$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{-7 - 17}{2} = -12$ et $x_2 = \frac{-7 + 17}{2} = 5$.

— Une longueur est positive : on rejette -12 et on retient $x = 5$.

— **Vérification** : $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ ✓

Les côtés mesurent 5 cm, 12 cm et 13 cm.

Réponse. 5 cm, 12 cm et 13 cm.

Correction de l'exercice 14 - Deux fois à la même hauteur

On résout $h(t) = 16$:

$$-5t^2 + 20t + 1,5 = 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 14,5 = 0$$

— On multiplie par -2 pour supprimer les décimaux : $10t^2 - 40t + 29 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 1600 - 4 \times 10 \times 29 = 1600 - 1160 = 440 > 0$.

— $\sqrt{440} \approx 20,976$.

— **Racines** :

$$t_1 = \frac{40 - 20,976}{20} \approx 0,95 \quad t_2 = \frac{40 + 20,976}{20} \approx 3,05$$

La balle passe à 16 m deux fois : une première fois à la **montée**, environ 0,95 s après le lancer, une seconde fois à la **descente**, environ 3,05 s après.

— **Contrôle de cohérence** : le sommet est atteint en $t = \frac{20}{10} = 2$ s, or 2 est bien le milieu de 0,95 et 3,05 ✓

Réponse. Environ $t \approx 0,95$ s (montée) et $t \approx 3,05$ s (descente).

Correction de l'exercice 15 - Un nombre et son inverse

Mise en équation. L'énoncé s'écrit, pour $x \neq 0$:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

— On multiplie les deux membres par $2x$ (non nul) : $2x^2 + 2 = 5x$.

— On ramène tout à gauche : $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$.

— Les deux valeurs sont non nulles : elles conviennent.

— **Vérification** : $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ✓ et $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ ✓

$$S = \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right\rangle$$

Remarque jolie. Les deux solutions sont inverses l'une de l'autre — ce qui était prévisible, puisque l'équation est inchangée quand on remplace x par $\frac{1}{x}$.

Réponse. $S = \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right\rangle$.

Correction de l'exercice 16 - Deux entiers consécutifs et leurs carrés

— **Inconnue** : x le plus petit entier ; le suivant est $x + 1$.

— **Mise en équation** :

$$x^2 + (x + 1)^2 = 61$$

— On développe : $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 61$, soit $2x^2 + 2x - 60 = 0$.

— On divise par 2 : $x^2 + x - 30 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 1 + 120 = 121$, et $\sqrt{121} = 11$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{-1-11}{2} = -6$ et $x_2 = \frac{-1+11}{2} = 5$.

— Les deux valeurs sont des entiers : on garde les deux solutions.

— **Vérification** : $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ ✓ et $(-6)^2 + (-5)^2 = 36 + 25 = 61$ ✓

Les couples cherchés sont (5 ; 6) et (-6 ; -5).

Réponse. (5 ; 6) et (-6 ; -5).