

**Plaquette 1 - Racines évidentes,
factorisation et règle du produit nul**
Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths
Corrections détaillées

Boîte à outils**Les trois factorisations à reconnaître.**

$$ka + kb = k(a + b) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Règle du produit nul. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Racine d'un polynôme. a est une racine de P lorsque $P(a) = 0$. Les racines « évidentes » à tester en premier sont 0, 1, -1, 2, -2.

Théorème de factorisation. Si a est une racine de P , alors $P(x)$ se factorise par $(x - a)$:

$$P(x) = (x - a) \times Q(x)$$

- pour un trinôme, Q est du premier degré ;
- pour un polynôme de degré 3, Q est du second degré.

Interdit. Simplifier une équation par x ou par $(x - a)$: on perd la solution correspondante. On factorise, on n'élimine pas.

Correction de l'exercice 1 - Chercher le facteur commun

On repère à chaque fois le facteur qui apparaît dans tous les termes :

$$ka + kb = k(a + b)$$

- a) x est en facteur : $x^2 - 5x = x(x - 5)$.
 b) $3x$ est en facteur : $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$.
 c) le facteur commun est le **bloc** $(x - 3)$: $2x(x - 3) + 5(x - 3) = (x - 3)(2x + 5)$.
 d) on écrit $(x + 1) = (x + 1) \times 1$, donc
 $(x + 1)(2x - 7) - (x + 1) = (x + 1)[(2x - 7) - 1] = (x + 1)(2x - 8)$, soit $2(x + 1)(x - 4)$.

Contrôle : en développant c), $(x - 3)(2x + 5) = 2x^2 + 5x - 6x - 15 = 2x^2 - x - 15$, et
 $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 2x^2 - 6x + 5x - 15 \checkmark$

Réponse. a) $x(x - 5)$ — b) $3x(x + 2)$ — c) $(x - 3)(2x + 5)$ — d) $2(x + 1)(x - 4)$.

Correction de l'exercice 2 - Différences de carrés

On utilise l'identité :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- a) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$.
 b) $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$, donc $9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$.
 c) avec $a = x + 1$ et $b = 2$: $(x + 1)^2 - 4 = (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x - 1)(x + 3)$.
 d) $7 = (\sqrt{7})^2$, donc $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

Contrôle du c) : $(x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$, et
 $(x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3$ ✓

Attention. Une **somme** de carrés comme $x^2 + 16$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Réponse. a) $(x-4)(x+4)$ — b) $(3x-5)(3x+5)$ — c) $(x-1)(x+3)$ — d) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$.

Correction de l'exercice 3 - Est-ce un carré parfait ?

On teste l'identité :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

a) $x^2 + 6x + 9$: ici $a = x$, $b = 3$, et le double produit $2ab = 6x$ correspond bien. Donc $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

b) $4x^2 = (2x)^2$ et $9 = 3^2$; le double produit vaut $2 \times 2x \times 3 = 12x$, qui correspond au terme $-12x$ au signe près. Donc $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$.

c) $a = x$ et $b = 2$ donneraient un double produit de $4x$, or le terme central vaut $2x$: **ce n'est pas un carré parfait**. Son discriminant, $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$, confirme qu'il ne se factorise pas.

Méthode. Un carré parfait se repère en trois secondes : racine carrée du premier terme, racine carrée du dernier, puis vérification du **double produit**.

Réponse. a) $(x+3)^2$ — b) $(2x-3)^2$ — c) non.

Correction de l'exercice 4 - Factoriser par regroupement

On groupe les deux premiers termes, puis les deux derniers :

$$P(x) = (x^3 + 2x^2) + (-3x - 6) = x^2(x+2) - 3(x+2)$$

— Le bloc $(x+2)$ est maintenant en facteur :

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 3)$$

— On peut aller plus loin, car $x^2 - 3$ est une différence de carrés :

$$P(x) = (x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

— **Contrôle** : $(x+2)(x^2 - 3) = x^3 - 3x + 2x^2 - 6$ ✓

Quand ça marche. Le regroupement fonctionne quand les deux couples font apparaître le **même** facteur ; il faut parfois mettre -3 (et non 3) en facteur pour cela.

Réponse. $P(x) = (x+2)(x^2 - 3) = (x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 5 - Tester des racines évidentes

— $P(0) = 12$, $P(1) = 1 - 7 + 12 = 6$: ni 0 ni 1 ne sont racines.

— $P(3) = 9 - 21 + 12 = 0$: **3 est une racine.**

— $P(4) = 16 - 28 + 12 = 0$: **4 est une racine.**

Un trinôme a au plus deux racines : on les a donc toutes les deux. La forme factorisée d'un trinôme de racines x_1 et x_2 est $a(x-x_1)(x-x_2)$, avec ici $a = 1$:

$$P(x) = (x-3)(x-4)$$

— **Contrôle** : $(x-3)(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$ ✓

Astuce de lecture. Les racines ont pour somme 7 et pour produit 12 : chercher deux nombres de somme 7 et de produit 12 donne 3 et 4 immédiatement.

Réponse. $P(3) = P(4) = 0$ et $P(x) = (x - 3)(x - 4)$.

Correction de l'exercice 6 - Une équation produit à deux facteurs affines

D'après la **règle du produit nul** :

$$(2x - 6)(3x + 9) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \text{ ou } 3x + 9 = 0$$

— $2x - 6 = 0$ donne $2x = 6$, donc $x = 3$.

— $3x + 9 = 0$ donne $3x = -9$, donc $x = -3$.

$$S = \{-3; 3\}$$

— **Vérification** : pour $x = 3$, le premier facteur est nul, donc le produit aussi ✓ ; pour $x = -3$, c'est le second ✓

Ne pas développer ! En développant, on obtiendrait $6x^2 - 54$, puis il faudrait factoriser à nouveau. Une équation déjà factorisée se résout telle quelle.

Réponse. $S = \{-3; 3\}$.

Correction de l'exercice 7 - Le piège de la simplification

La bonne méthode. On ramène tout d'un côté, puis on factorise :

$$x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

— Règle du produit nul : $x = 0$ ou $x - 5 = 0$.

$$S = \{0; 5\}$$

Pourquoi la division est interdite. Diviser par x suppose $x \neq 0$: on écarte alors **sans le dire** la solution $x = 0$, et on ne trouve que $x = 5$. La réponse est donc incomplète.

— **Vérification** : $0^2 = 0 = 5 \times 0$ ✓ et $5^2 = 25 = 5 \times 5$ ✓

Règle générale. On ne divise jamais une équation par une expression contenant l'inconnue : on factorise.

Réponse. $S = \{0; 5\}$ — diviser par x ferait perdre la solution 0.

Correction de l'exercice 8 - Le même bloc des deux côtés

On ramène tout à gauche et on factorise par le bloc commun $(x - 2)$:

$$(x - 2)^2 - (x - 2)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2) - (3x + 1)] = 0$$

— On simplifie le crochet : $(x - 2) - (3x + 1) = x - 2 - 3x - 1 = -2x - 3$.

— L'équation devient $(x - 2)(-2x - 3) = 0$.

— Règle du produit nul : $x = 2$ ou $-2x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$.

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$$

— **Vérification pour** $x = 2$: les deux membres valent 0 ✓

— **Vérification pour** $x = -\frac{3}{2}$: à gauche $\left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$; à droite $\left(-\frac{7}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$ ✓

Piège. Simplifier par $(x - 2)$ ferait perdre la solution $x = 2$.

Réponse. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.

Correction de l'exercice 9 - Factoriser à partir d'une racine connue

- a) $P(-1) = 2 \times 1 + 3 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0 \checkmark$: -1 est bien une racine.
 b) Puisque -1 est racine, $P(x)$ se factorise par $(x + 1)$:

$$P(x) = (x + 1)(ax + b)$$
- Le terme en x^2 impose $a = 2$; le terme constant impose $b = -5$. Donc $P(x) = (x + 1)(2x - 5)$.
 - **Contrôle** : $(x + 1)(2x - 5) = 2x^2 - 5x + 2x - 5 = 2x^2 - 3x - 5 \checkmark$
 - **Racines** : $x + 1 = 0$ ou $2x - 5 = 0$, donc $x = -1$ ou $x = \frac{5}{2}$.

Contrôle par le produit des racines : $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$, et $(-1) \times \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \checkmark$

Réponse. $P(x) = (x + 1)(2x - 5)$; racines -1 et $\frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Somme et produit à vue

Pour un trinôme de la forme $x^2 - Sx + P$, les racines ont pour **somme** S et pour **produit** P :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -15$$

- Le produit étant négatif, les deux racines sont de **signes contraires**.
- Les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5, 15. Le couple $(-3; 5)$ a pour produit -15 et pour somme 2 : ce sont les racines.
- **Factorisation** :

$$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$$

- **Contrôle** : $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15 \checkmark$

Quand l'utiliser. Cette recherche est immédiate dès que les racines sont entières ; sinon, on passe au discriminant.

Réponse. $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$, racines -3 et 5 .

Correction de l'exercice 11 - Trois facteurs d'un coup

On commence par **factoriser complètement** le premier facteur, qui est une différence de carrés :

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

- L'équation s'écrit donc $(x - 3)(x + 3)(x + 1) = 0$.
- La règle du produit nul s'étend à trois facteurs : le produit est nul lorsque l'un au moins des trois l'est.
- $x - 3 = 0$, ou $x + 3 = 0$, ou $x + 1 = 0$.

$$S = \{-3; -1; 3\}$$

- **Vérification pour** $x = -1$: $\left((-1)^2 - 9\right) \times 0 = (-8) \times 0 = 0 \checkmark$

À noter. Une équation polynomiale de degré 3 a **au plus trois** solutions : on les a toutes ici.

Réponse. $S = \{-3; -1; 3\}$.

Correction de l'exercice 12 - Une équation de degré 4 sans discriminant

On ramène tout d'un côté, puis on met x^2 en facteur :

$$x^4 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 16) = 0$$

— On factorise encore la différence de carrés :

$$x^2(x - 4)(x + 4) = 0$$

— Règle du produit nul : $x^2 = 0$, ou $x - 4 = 0$, ou $x + 4 = 0$.

— $x^2 = 0$ donne $x = 0$.

$$S = \{-4; 0; 4\}$$

— **Vérification pour $x = 4$** : $4^4 = 256$ et $16 \times 4^2 = 16 \times 16 = 256$ ✓

Piège. Diviser par x^2 ferait perdre la solution $x = 0$; et $x^4 - 16x^2$ n'est pas $(x^2 - 4x)^2$.

Réponse. $S = \{-4; 0; 4\}$.

Correction de l'exercice 13 - Une factorisation qui démontre

Factorisation. On met n en facteur :

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

Le nombre $n^2 + n$ est donc le produit de **deux entiers consécutifs**.

Conclusion. Parmi deux entiers consécutifs, l'un est nécessairement pair :

— si n est pair, le produit $n(n + 1)$ est pair ;

— si n est impair, alors $n + 1$ est pair, et le produit est encore pair.

Dans les deux cas, $n^2 + n$ est pair.

— **Contrôle sur des exemples** : $n = 5$ donne $25 + 5 = 30$ ✓ ; $n = 8$ donne $64 + 8 = 72$ ✓

Ce qu'il faut retenir. Factoriser ne sert pas qu'à résoudre des équations : une expression factorisée **montre** des propriétés que la forme développée cache.

Réponse. $n^2 + n = n(n + 1)$, produit de deux entiers consécutifs, donc pair.

Correction de l'exercice 14 - Le carré évidé

a) L'aire restante est la différence des deux aires :

$$A(x) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

— C'est une différence de carrés :

$$A(x) = (x - 3)(x + 3)$$

b) On résout $(x - 3)(x + 3) = 40$. Attention : le second membre n'est pas nul, on **ne peut pas** appliquer la règle du produit nul. On repasse donc par la forme développée :

$$x^2 - 9 = 40 \Leftrightarrow x^2 = 49$$

— Donc $x = 7$ ou $x = -7$. La contrainte $x > 3$ écarte -7 .

— **Vérification** : $49 - 9 = 40$ ✓

Le carré de départ mesure 7 cm de côté.

Piège classique. La règle du produit nul ne s'applique **que** lorsque le produit vaut 0.

Réponse. a) $A(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ — b) $x = 7$ cm.

Correction de l'exercice 15 – Le terrain déformé

a) Le nouveau terrain est un rectangle de dimensions $x + 4$ et $x - 4$ (avec $x > 4$) :

$$A(x) = (x + 4)(x - 4)$$

— C'est une différence de carrés, donc :

$$A(x) = x^2 - 16$$

b) L'aire initiale valait x^2 . La variation est :

$$A(x) - x^2 = x^2 - 16 - x^2 = -16$$

— La différence est **constante et négative** : l'aire diminue toujours de 16 m^2 , quelle que soit la taille du terrain.

— **Contrôle** : pour $x = 10$, on passe de 100 m^2 à $14 \times 6 = 84 \text{ m}^2$, soit 16 m^2 de moins ✓ ;
pour $x = 50$, de 2500 m^2 à $54 \times 46 = 2484 \text{ m}^2$ ✓

Morale. « Ce qu'on ajoute d'un côté et qu'on retire de l'autre » ne se compense pas : à périmètre égal, le carré reste le rectangle d'aire maximale.

Réponse. a) $A(x) = x^2 - 16$ — b) l'aire perd toujours exactement 16 m^2 .