

Plaquette 4 – Polynômes de degré 3 : racine évidente et factorisation

Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Polynôme de degré 3. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. Il admet **au plus trois** racines réelles.

Théorème de factorisation. Si $P(\alpha) = 0$, alors il existe un trinôme Q tel que

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) \quad \text{avec } Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$$

Méthode d'identification, en quatre temps :

- **1.** Écrire $P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + \beta x + \gamma)$ — le coefficient de x^2 dans Q est celui de x^3 dans P .
- **2.** Développer le membre de droite.
- **3.** Identifier les coefficients terme à terme ; le plus rapide est le **terme constant** : $-\alpha\gamma = d$.
- **4.** Vérifier avec un coefficient non utilisé, puis résoudre $Q(x) = 0$ au discriminant.

Racines évidentes à tester : 0, 1, -1, 2, -2, 3. Si la somme des coefficients est nulle, 1 est racine.

Signe. Une fois P entièrement factorisé, un tableau de signes avec une ligne par facteur donne le signe de P et résout toute inéquation.

Identité utile.

$$x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un polynôme de degré 3

a) Le terme de plus haut degré est $2x^3$: le degré vaut 3. Le terme en x^2 est absent, donc

$$a = 2 \quad b = 0 \quad c = -5 \quad d = 1$$

b) On développe : $(x - 1)(x^2 + 4) = x^3 + 4x - x^2 - 4 = x^3 - x^2 + 4x - 4$. Degré 3, avec $a = 1, b = -1, c = 4, d = -4$.

c) On développe : $x^2(x + 3) - x^3 = x^3 + 3x^2 - x^3 = 3x^2$. Les termes de degré 3 se **simplifient** : le degré vaut 2, pas 3.

Leçon du c). Le degré se lit sur la forme **développée et réduite**, jamais sur l'écriture de départ.

Réponse. a) degré 3 : 2 ; 0 ; -5 ; 1 — b) degré 3 : 1 ; -1 ; 4 ; -4 — c) degré 2.

Correction de l'exercice 2 – Chercher les racines évidentes

- $P(1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$: 1 **est racine**.
- $P(-1) = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$: -1 **est racine**.
- $P(3) = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$: 3 **est racine**.

Un polynôme de degré 3 a **au plus trois** racines : on les a toutes. Sa forme factorisée s'écrit donc, le coefficient dominant valant 1 :

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

— **Contrôle par développement** : $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$, puis
 $(x^2 - 1)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ✓

— **Contrôle par le terme constant** : $(-1) \times 1 \times (-3) = 3$, qui est bien d ✓

Repérage utile. La somme des coefficients vaut $1 - 3 - 1 + 3 = 0$: c'est la signature de la racine 1.

Réponse. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$; racines -1 , 1 et 3 .

Correction de l'exercice 3 - Factoriser par identification

a) $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ✓

b) On développe le produit attendu :

$$(x - 1)(x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x - x^2 - \beta x - \gamma$$

— On réduit : $x^3 + (\beta - 1)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$.

— **Identification terme à terme** avec $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$:

— terme constant : $-\gamma = -6$, donc $\gamma = 6$;

— terme en x^2 : $\beta - 1 = -6$, donc $\beta = -5$;

— **vérification** avec le terme en x : $\gamma - \beta = 6 + 5 = 11$ ✓

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

c) On résout $x^2 - 5x + 6 = 0$: $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $\frac{5 \pm 1}{2}$, soit 2 et 3.

$$S = \{1; 2; 3\}$$

Réponse. b) $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$ — c) $S = \{1; 2; 3\}$.

Correction de l'exercice 4 - Quand le coefficient dominant n'est pas 1

Vérification préalable : $P(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$ ✓

Le coefficient de x^3 vaut 2 : le trinôme facteur commence donc par $2x^2$.

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + \beta x + \gamma)$$

— On développe : $2x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 6x^2 - 3\beta x - 3\gamma$, soit $2x^3 + (\beta - 6)x^2 + (\gamma - 3\beta)x - 3\gamma$.

— **Terme constant** : $-3\gamma = 6$, donc $\gamma = -2$.

— **Terme en x^2** : $\beta - 6 = -3$, donc $\beta = 3$.

— **Vérification** avec le terme en x : $\gamma - 3\beta = -2 - 9 = -11$ ✓

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$$

— **Racines du trinôme** : $\Delta = 9 + 16 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, donc $x = \frac{-3 \pm 5}{4}$, soit $\frac{1}{2}$ et -2 .

$$S = \left\{-2; \frac{1}{2}; 3\right\}$$

— **Contrôle** : le produit des trois racines vaut $-2 \times \frac{1}{2} \times 3 = -3$, et $-\frac{d}{a} = -\frac{6}{2} = -3$ ✓

Réponse. $P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$; $S = \left\{-2; \frac{1}{2}; 3\right\}$.

Correction de l'exercice 5 - Trouver soi-même la racine

Recherche d'une racine évidente. On teste les valeurs habituelles :

- $P(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = -8$, non ;
- $P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$: -1 **est racine**.

Factorisation par $(x + 1)$:

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 + (\beta + 1)x^2 + (\gamma + \beta)x + \gamma$$

- terme constant : $\gamma = -6$;
- terme en x^2 : $\beta + 1 = 2$, donc $\beta = 1$;
- **vérification** : $\gamma + \beta = -6 + 1 = -5$ ✓

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + x - 6)$$

- **Racines du trinôme** : $\Delta = 1 + 24 = 25$, donc $x = \frac{-1 \pm 5}{2}$, soit 2 et -3 .

$$S = \{-3; -1; 2\}$$

- **Factorisation complète** : $P(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$, dont on contrôle le terme constant : $1 \times 3 \times (-2) = -6$ ✓

Réponse. $S = \{-3; -1; 2\}$ et $P(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$.

Correction de l'exercice 6 - Sans terme constant

Aucune identification n'est nécessaire : le terme constant est absent, donc x est en facteur.

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$$

- Règle du produit nul : $x = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- **Trinôme** : $\Delta = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$, racines $\frac{4 \pm 2}{2}$, soit 1 et 3.

$$S = \{0; 1; 3\}$$

- **Factorisation complète** : $x(x - 1)(x - 3)$.
- **Vérification** : $P(3) = 27 - 36 + 9 = 0$ ✓

Réflexe. Terme constant nul $\Rightarrow 0$ est racine, et x se met en facteur : c'est toujours le premier coup d'œil sur un polynôme de degré 3.

Réponse. $S = \{0; 1; 3\}$.

Correction de l'exercice 7 - Le signe d'un polynôme de degré 3

Les trois facteurs s'annulent respectivement en 3, $\frac{1}{2}$ et -2 . On range ces valeurs dans l'ordre croissant : $-2 < \frac{1}{2} < 3$.

Intervalle	$] -\infty; -2[$	$] -2; \frac{1}{2}[$	$] \frac{1}{2}; 3[$	$] 3; +\infty[$
Signe de $x + 2$	—	+	+	+
Signe de $2x - 1$	—	—	+	+
Signe de $x - 3$	—	—	—	+
Signe de $P(x)$	—	+	—	+

L'inégalité est large : on inclut les trois racines.

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right]$$

- **Contrôle** : $P(0) = 6 > 0 \checkmark$; $P(1) = 2 - 3 - 11 + 6 = -6 < 0 \checkmark$;
 $P(4) = 128 - 48 - 44 + 6 = 42 > 0 \checkmark$

Remarque. Avec un coefficient dominant positif, un polynôme de degré 3 à trois racines alterne les signes $-$, $+$, $-$, $+$: le tableau doit le confirmer.

Réponse. $S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

Correction de l'exercice 8 - Une seule solution

La valeur $x = 2$ convient, puisque $2^3 = 8$. Reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

Factorisation. On écrit $x^3 - 8 = 0$ et on utilise l'identité du cours :

$$x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

- Avec $\alpha = 2$:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

- **Contrôle** : $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8 \checkmark$
 — **Le second facteur** a pour discriminant $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$: il n'a aucune racine réelle, et reste strictement positif.
 — Le produit est donc nul uniquement quand $x - 2 = 0$.

$$S = \{2\}$$

Différence avec le carré. $x^2 = 4$ a deux solutions, mais $x^3 = 8$ n'en a qu'une : la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $S = \{2\}$, car $x^2 + 2x + 4$ ne s'annule jamais.

Correction de l'exercice 9 - Construire un polynôme de degré 3

Forme factorisée. Un polynôme de degré 3 de coefficient dominant a et de racines x_1 , x_2 , x_3 s'écrit :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

- Ici : $P(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 4)$.
 — **Développement, étape par étape.** D'abord $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4$.
 — Puis $(x + 2)(x^2 - 5x + 4) = x^3 - 5x^2 + 4x + 2x^2 - 10x + 8 = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
 — Enfin, on multiplie par 2 :

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$$

- **Contrôle sur une racine** : $P(1) = 2 - 6 - 12 + 16 = 0 \checkmark$
 — **Contrôle sur une autre** : $P(-2) = -16 - 24 + 24 + 16 = 0 \checkmark$

Remarque. Sans la donnée du coefficient dominant, il y aurait une infinité de réponses : toutes proportionnelles entre elles.

Réponse. $P(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 4) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$.

Correction de l'exercice 10 - Lire une courbe de degré 3

- a) La courbe coupe l'axe des abscisses en -2 , 1 et 3 : ce sont les trois racines.

b) Avec un coefficient dominant égal à 1 :

$$P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

— Développement : $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$, puis

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 8x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

— **Contrôle** : $P(0) = 6$, ce qui correspond à l'ordonnée à l'origine lue sur le graphique ✓

— c) La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses entre -2 et 1 , puis après 3 :

$$S = [-2; 1] \cup [3; +\infty[$$

Cohérence. Un polynôme de degré 3 à coefficient dominant positif finit par être positif « à droite » : le tableau de signes doit se terminer par un +.

Réponse. a) $-2, 1, 3$ — b) $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ — c) $[-2; 1] \cup [3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 11 - Intersection avec une parabole

Les points communs vérifient la même ordonnée :

$$x^3 = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

— Le terme constant est nul : on factorise par x .

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

— **Trinôme** : $\Delta = 9 - 8 = 1$, racines $\frac{3 \pm 1}{2}$, soit 1 et 2. Donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

— Règle du produit nul : $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 2$.

— **Ordonnées correspondantes** : 0, 1 et 8.

Les trois points d'intersection sont $(0; 0)$, $(1; 1)$ et $(2; 8)$.

— **Contrôle sur la parabole** : $3 \times 4 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8$ ✓

À retenir. Deux courbes peuvent se couper en trois points : le nombre de solutions est celui de l'équation, pas une habitude prise avec les droites.

Réponse. $x \in \{0; 1; 2\}$, soit les points $(0; 0)$, $(1; 1)$ et $(2; 8)$.

Correction de l'exercice 12 - Trois dimensions consécutives

Mise en équation. Le volume d'un pavé droit est le produit de ses trois dimensions :

$$x(x + 1)(x + 2) = 60$$

— On développe : $x(x + 1) = x^2 + x$, puis

$$(x^2 + x)(x + 2) = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

— L'équation devient $x^3 + 3x^2 + 2x - 60 = 0$.

— **Racine évidente** : $P(3) = 27 + 27 + 6 - 60 = 0$ ✓

— **Factorisation** : $P(x) = (x - 3)(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $-3\gamma = -60$, donc $\gamma = 20$; et $\beta - 3 = 3$, donc $\beta = 6$. Vérification du terme en x : $\gamma - 3\beta = 20 - 18 = 2$ ✓

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + 6x + 20)$$

— Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 36 - 80 = -44 < 0$: aucune racine réelle.

— La seule solution est donc $x = 3$, acceptable puisque positive.

— **Vérification** : $3 \times 4 \times 5 = 60$ ✓

Les dimensions sont 3 cm, 4 cm et 5 cm.

Réponse. $x = 3$: le pavé mesure $3 \times 4 \times 5$ cm.

Correction de l'exercice 13 - La boîte sans couvercle

a) Le fond de la boîte est un carré de côté $20 - 2x$ et la hauteur vaut x :

$$V(x) = x(20 - 2x)^2$$

— On développe : $(20 - 2x)^2 = 400 - 80x + 4x^2$, donc

$$V(x) = x(4x^2 - 80x + 400) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$$

b) On résout $V(x) = 576$, soit $4x^3 - 80x^2 + 400x - 576 = 0$. On divise par 4 :

$$x^3 - 20x^2 + 100x - 144 = 0$$

— **Racine évidente** : pour $x = 4$, $64 - 320 + 400 - 144 = 0$ ✓

— **Factorisation** : $(x - 4)(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $-4\gamma = -144$, donc $\gamma = 36$; et $\beta - 4 = -20$, donc $\beta = -16$. Vérification : $\gamma - 4\beta = 36 + 64 = 100$ ✓

$$x^3 - 20x^2 + 100x - 144 = (x - 4)(x^2 - 16x + 36)$$

— **Trinôme** : $\Delta = 256 - 144 = 112$, et $\sqrt{112} = 4\sqrt{7} \approx 10,58$. Les racines sont $\frac{16 \pm 4\sqrt{7}}{2} = 8 \pm 2\sqrt{7}$, soit environ 2,7 et 13,3.

— La valeur 13,3 est hors du domaine $]0; 10[$: on la rejette.

Deux découpes conviennent : $x = 4$ cm, et $x = 8 - 2\sqrt{7} \approx 2,7$ cm.

— **Vérification** : $4 \times (20 - 8)^2 = 4 \times 144 = 576$ ✓

Réponse. a) $V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$ — b) $x = 4$ cm ou $x = 8 - 2\sqrt{7} \approx 2,7$ cm.

Correction de l'exercice 14 - Deux racines et un point

Forme factorisée avec un coefficient inconnu :

$$P(x) = a(x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

— **On utilise la condition** $P(0) = 12$:

$$P(0) = a \times (-1) \times 2 \times (-3) = 6a$$

— Donc $6a = 12$, c'est-à-dire $a = 2$.

$$P(x) = 2(x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

— **Forme développée** : $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$, puis

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

— Donc $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$.

— **Contrôle** : $P(0) = 12$ ✓ et $P(3) = 54 - 36 - 30 + 12 = 0$ ✓

Méthode générale. Les racines donnent la forme factorisée **à un coefficient près** ; une valeur supplémentaire suffit à fixer ce coefficient.

Réponse. $P(x) = 2(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$.

Correction de l'exercice 15 - Une factorisation qui prouve une divisibilité

Factorisation. On met n en facteur, puis on reconnaît une différence de carrés :

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Le nombre $n^3 - n$ est donc le produit de **trois entiers consécutifs**.

Divisibilité par 2. Parmi trois entiers consécutifs, au moins un est pair : le produit est divisible par 2.

Divisibilité par 3. Parmi trois entiers consécutifs, exactement un est un multiple de 3 : le produit est divisible par 3.

Conclusion. Le produit est divisible par 2 et par 3, qui n'ont aucun diviseur commun autre que 1 : il est donc divisible par 6.

— **Contrôle** : $n = 4$ donne $64 - 4 = 60 = 6 \times 10 \checkmark$; $n = 7$ donne $343 - 7 = 336 = 6 \times 56 \checkmark$

Ce qu'il faut voir. La forme développée ne dit rien ; la forme factorisée donne la démonstration en deux lignes.

Réponse. $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$, produit de trois entiers consécutifs, donc divisible par 2 et par 3.

Correction de l'exercice 16 - À partir de quand est-ce rentable ?

— **Recette** : $R(x) = 22x$.

— **Bénéfice** :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 22x - (x^3 - 9x^2 + 30x) = -x^3 + 9x^2 - 8x$$

— **Factorisation** : le terme constant est nul, donc x est en facteur.

$$B(x) = -x(x^2 - 9x + 8)$$

— **Trinôme** : $\Delta = 81 - 32 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, racines $\frac{9 \pm 7}{2}$, soit 1 et 8. Donc

$$x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8) \text{ et}$$

$$B(x) = -x(x - 1)(x - 8)$$

— **Tableau de signes** sur le domaine $]0 ; 10]$: $-x < 0$, $x - 1$ change de signe en 1, $x - 8$ en 8.

Intervalle	$]0 ; 1[$	$]1 ; 8[$	$]8 ; 10]$
Signe de $B(x)$	−	+	−

L'entreprise est bénéficiaire pour une production comprise entre 1 et 8 tonnes.

— **Contrôle** : $B(4) = -64 + 144 - 32 = 48 > 0 \checkmark$ et $B(9) = -729 + 729 - 72 = -72 < 0 \checkmark$

Réponse. $B(x) \geq 0$ pour $x \in [1 ; 8]$ tonnes.