

Plaquette 3 – Signe du trinôme, inéquations et lecture graphique

Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$. Il est du signe de a partout, **sauf entre les racines** quand elles existent :

$\Delta > 0$: signe de a à l'extérieur des racines $\Delta \leq 0$: signe de a partout

Signe d'un produit de facteurs. On dresse une ligne par facteur, puis on multiplie les signes colonne par colonne. Une valeur qui annule un facteur annule le produit.

Signe d'un polynôme de degré 3 factorisé $P(x) = (x - a)(bx^2 + cx + d)$: même méthode, avec une ligne pour le facteur affine et une ligne pour le trinôme.

Lecture graphique.

- $f(x) > 0$: la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) \geq k$: la courbe est au-dessus de la **droite horizontale** d'équation $y = k$;
- $f(x) \leq g(x)$: C_f est en dessous de C_g .

Crochets. Inégalité **stricte** : bornes exclues. Inégalité **large** : bornes incluses — sauf si la valeur est interdite (dénominateur nul).

Vérification finale. On teste une valeur de chaque intervalle : c'est le seul contrôle qui attrape une erreur de signe.

Correction de l'exercice 1 – Lire un tableau de signes

a) Le trinôme change de signe en -1 et en 4 : ce sont ses **racines**. Il est négatif à l'extérieur de $[-1; 4]$, donc du signe de a à l'extérieur : $a < 0$.

b) Toute expression de la forme $a(x + 1)(x - 4)$ avec $a < 0$ convient. En prenant $a = -1$:

$$f(x) = -(x + 1)(x - 4) = -x^2 + 3x + 4$$

- **Contrôle** : $f(0) = 4 > 0$, et 0 est bien entre les racines ✓
- c) $f(x) \leq 0$ correspond aux intervalles marqués –, bornes **comprises** puisque l'inégalité est large :

$$S =]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$$

À retenir. Un tableau de signes contient toute l'information : racines, signe de a , et donc la forme factorisée à un coefficient près.

Réponse. a) racines -1 et 4 , $a < 0$ — b) $f(x) = -(x + 1)(x - 4)$ — c) $]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 2 – Partir de la forme factorisée

La forme factorisée donne les racines **sans aucun calcul** :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0$$

- Racines : -1 et 4 . Coefficient dominant : $a = 2 > 0$.
- Le trinôme est donc positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

Intervalle	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 4[$	$] 4 ; +\infty[$
Signe de $x + 1$	–	+	+
Signe de $x - 4$	–	–	+
Signe de $f(x)$	+	–	+

$$S =]-\infty ; -1[\cup]4 ; +\infty[$$

— **Contrôle** : $f(0) = 2 \times 1 \times (-4) = -8 < 0 \checkmark$ et $f(5) = 2 \times 6 \times 1 = 12 > 0 \checkmark$

Réponse. $S =]-\infty ; -1[\cup]4 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 3 - Partir de la forme canonique

Racines. On résout directement sur la forme canonique :

$$-(x - 3)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4$$

— Donc $x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2$, c'est-à-dire $x = 5$ ou $x = 1$.

Signe. Le coefficient dominant vaut $a = -1 < 0$: le trinôme est **positif entre** ses racines, négatif à l'extérieur.

Intervalle	$] -\infty ; 1[$	$] 1 ; 5[$	$] 5 ; +\infty[$
Signe de $g(x)$	–	+	–

— **Contrôle** : $g(3) = 4 > 0 \checkmark$ (c'est le maximum, atteint au sommet) et $g(0) = -9 + 4 = -5 < 0 \checkmark$

Remarque. La forme canonique donne le sommet **et** les racines : ici $S(3; 4)$, et les racines sont symétriques autour de $x = 3$.

Réponse. Racines 1 et 5 ; $g(x) > 0$ sur $]1 ; 5[$, $g(x) < 0$ à l'extérieur.

Correction de l'exercice 4 - Un trinôme qui touche l'axe

L'expression est un carré multiplié par $3 > 0$:

$$(x - 2)^2 \geq 0 \quad \text{donc} \quad h(x) \geq 0 \quad \text{pour tout réel } x$$

— $h(x) = 0$ uniquement pour $x = 2$: c'est la **racine double**.

— Pour toute autre valeur, $h(x) > 0$.

Intervalle	$] -\infty ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $h(x)$	+	+

Résolution. L'inégalité est **stricte**, donc la racine est exclue :

$$S = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

Piège classique. Répondre $S = \mathbb{R}$ oublie que $h(2) = 0$, et 0 n'est pas strictement positif.

Réponse. $h(x) \geq 0$ partout ; $S =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 5 - Négatif du début à la fin

— **Discriminant** :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 1 - 12 = -11 < 0$$

— Le trinôme n'a **aucune racine réelle** : il ne change donc jamais de signe.

— Il garde le signe de $a = -1 < 0$: il est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

Confirmation par la forme canonique :

$$\alpha = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{11}{4}$$

$$-x^2 + x - 3 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$$

L'expression est la somme d'un nombre négatif ou nul et de $-\frac{11}{4}$: elle vaut au plus $-\frac{11}{4}$, donc reste strictement négative.

— **Contrôle** : $x = 0$ donne -3 ✓ ; $x = 10$ donne $-100 + 10 - 3 = -93$ ✓

Réponse. $\Delta = -11 < 0$ et $a < 0$: le trinôme vaut au plus $-\frac{11}{4} < 0$.

Correction de l'exercice 6 - Une inéquation à fractions

Premier réflexe : multiplier par 2, un nombre **positif**, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité.

$$\frac{x^2}{2} - x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 4 + 32 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$.

— $a = 1 > 0$: le trinôme est positif **à l'extérieur** des racines.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 4[$	$] 4 ; +\infty[$
Signe de $x^2 - 2x - 8$	+	-	+

L'inégalité est large : les racines sont incluses.

$$S =]-\infty ; -2] \cup [4 ; +\infty[$$

— **Contrôle** : $x = 0$ donne $-4 < 0$, donc 0 n'est pas solution ✓

Réponse. $S =]-\infty ; -2] \cup [4 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 7 - Une inéquation stricte

On ramène tout à gauche pour comparer à 0 :

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 4 + 32 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$, racines -2 et 4 .

— $a = 1 > 0$: le trinôme est **négatif entre** les racines.

— L'inégalité étant **stricte**, les bornes sont exclues :

$$S =]-2 ; 4[$$

— **Contrôle** : $x = 0$ donne $0 < 8$ ✓ ; $x = 5$ donne $25 < 18$, ce qui est faux ✓ ; $x = 4$ donne $16 < 16$, faux également — la borne est bien exclue ✓

Comparaison instructive. Le même trinôme, comparé à 0 dans l'autre sens, donnait l'ensemble complémentaire : une inéquation, c'est un tableau de signes **plus** une lecture.

Réponse. $S =]-2 ; 4[$.

Correction de l'exercice 8 - Comparer deux fonctions

On étudie la **différence** :

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 1 - (2x - 5) = x^2 - 5x + 6$$

- **Discriminant** : $\Delta = 25 - 24 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.
- $a = 1 > 0$: la différence est négative entre 2 et 3.
- $f(x) \leq g(x)$ équivaut à $f(x) - g(x) \leq 0$, donc :

$$S = [2; 3]$$

Interprétation graphique. La parabole C_f est **en dessous** de la droite C_g pour x entre 2 et 3, et au-dessus ailleurs. Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 2 et 3.

- **Contrôle** : $f(2) = -1$ et $g(2) = -1$: égalité ✓ ; $f(0) = 1 > g(0) = -5$ ✓

Réponse. $S = [2; 3]$: C_f est sous C_g sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 9 - Un polynôme de degré 3

Le trinôme d'abord. $\Delta = 1 + 24 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, donc les racines sont $\frac{1-5}{2} = -2$ et $\frac{1+5}{2} = 3$. Comme $a = 1 > 0$, il est négatif entre -2 et 3 :

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

Le facteur affine $x - 1$ est négatif avant 1, positif après. Les trois valeurs remarquables sont donc -2 , 1 et 3 .

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 1[$	$] 1 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $x - 1$	−	−	+	+
Signe du trinôme	+	−	−	+
Signe de $P(x)$	−	+	−	+

$P(x)$ est donc positif sur $] -2 ; 1[\cup] 3 ; +\infty[$, négatif ailleurs, et nul en -2 , 1 et 3 .

- **Contrôle** : $P(0) = (-1) \times (-6) = 6 > 0$ ✓ et $P(2) = 1 \times (4 - 2 - 6) = -4 < 0$ ✓

Réponse. $P(x) > 0$ sur $] -2 ; 1[\cup] 3 ; +\infty[$, $P(x) < 0$ sur $] -\infty ; -2[\cup] 1 ; 3[$.

Correction de l'exercice 10 - Factoriser pour conclure

On ramène tout d'un côté, **sans jamais diviser par x** :

$$x^3 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) \geq 0$$

Les trois facteurs s'annulent en -2 , 0 et 2 .

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 0[$	$] 0 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de x	−	−	+	+
Signe de $x - 2$	−	−	−	+
Signe de $x + 2$	−	+	+	+
Signe du produit	−	+	−	+

L'inégalité est large : on inclut les trois valeurs où le produit s'annule.

$$S = [-2; 0] \cup [2; +\infty[$$

- **Contrôle** : $x = -1$ donne $-1 \geq -4$ ✓ ; $x = 1$ donne $1 \geq 4$, faux ✓

Réponse. $S = [-2; 0] \cup [2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 11 - Un dénominateur qui ne s'annule jamais

Le dénominateur d'abord. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, donc :

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Il ne s'annule jamais : il n'y a **aucune valeur interdite**, et le dénominateur est toujours **strictement positif**.

Conséquence. Le signe du quotient est exactement celui du numérateur :

$$\frac{3-x}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$S =]-\infty; 3]$$

— **Contrôle** : $x = 0$ donne $\frac{3}{1} = 3 \geq 0$ ✓ ; $x = 4$ donne $\frac{-1}{17} < 0$ ✓

À retenir. Repérer un facteur de signe constant — ici $x^2 + 1$ — transforme une inéquation quotient en une simple inéquation du premier degré.

Réponse. $S =]-\infty; 3]$.

Correction de l'exercice 12 - Tout lire sur le graphique

a) La courbe passe sous l'axe des abscisses entre ses deux points d'intersection, lus en $x = -1$ et $x = 3$:

$$S =]-1; 3[$$

— **Contrôle par le calcul** : $\Delta = 4 + 12 = 16$, racines $\frac{2 \pm 4}{2}$, soit -1 et 3 ✓

— b) On cherche les abscisses pour lesquelles la courbe est au-dessus de la droite horizontale d'ordonnée 5 : la lecture donne $x \leq -2$ ou $x \geq 4$.

— **Par le calcul** :

$$x^2 - 2x - 3 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

— $\Delta = 4 + 32 = 36$, racines -2 et 4 ; le trinôme est positif à l'extérieur.

$$S =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$$

— **Contrôle** : $f(-2) = 4 + 4 - 3 = 5$ ✓ et $f(4) = 16 - 8 - 3 = 5$ ✓

Réponse. a) $] -1; 3[$ — b) $] -\infty; -2] \cup [4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 - Combien de points d'intersection ?

Le nombre de solutions est donné par le signe du discriminant :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times k = 36 - 4k$$

— **Deux solutions** si $\Delta > 0$, soit $36 - 4k > 0$, c'est-à-dire $k < 9$;

— **une solution double** si $\Delta = 0$, soit $k = 9$;

— **aucune solution** si $\Delta < 0$, soit $k > 9$.

Interprétation graphique. La parabole d'équation $y = x^2 - 6x + k$ se déplace verticalement quand k varie ; son sommet a pour ordonnée

$$\beta = f(3) = 9 - 18 + k = k - 9$$

— si $k < 9$, le sommet est sous l'axe des abscisses : la parabole le coupe **deux fois** ;

— si $k = 9$, le sommet est **sur** l'axe : la parabole le touche ;

— si $k > 9$, le sommet est au-dessus : aucune intersection.

— **Contrôle avec** $k = 8$: $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$, deux racines ✓

Réponse. Deux solutions si $k < 9$, une si $k = 9$, aucune si $k > 9$.

Correction de l'exercice 14 - Le loueur de vélos

Bénéfice = recette - coût :

$$B(x) = -2x^2 + 58x - (10x + 160) = -2x^2 + 48x - 160$$

— L'activité est rentable quand $B(x) \geq 0$. On divise par -2 , ce qui **retourne** l'inégalité :

$$x^2 - 24x + 80 \leq 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 576 - 320 = 256$, et $\sqrt{256} = 16$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{24 - 16}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{24 + 16}{2} = 20$.

— Le trinôme (de coefficient dominant positif) est négatif **entre** ses racines :

$$S = [4; 20]$$

Le loueur est rentable à partir de 4 locations par jour, et jusqu'à 20.

— **Contrôle** : $B(4) = -32 + 192 - 160 = 0$ ✓ ; $B(12) = -288 + 576 - 160 = 128 > 0$ ✓ ;
 $B(25) = -1250 + 1200 - 160 = -210 < 0$ ✓

Interprétation. Au-delà de 20 locations, la recette plafonne — le modèle suppose des remises sur les volumes — alors que les coûts continuent de croître.

Réponse. Rentable pour $x \in [4; 20]$ locations par jour.

Correction de l'exercice 15 - Combien de temps au-dessus de 60 m ?

On résout $h(t) \geq 60$:

$$-5t^2 + 40t \geq 60$$

— On divise par -5 , ce qui **retourne** l'inégalité :

$$t^2 - 8t + 12 \leq 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 64 - 48 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$.

— **Racines** : $t_1 = \frac{8 - 4}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{8 + 4}{2} = 6$.

— Le trinôme est négatif entre ses racines : la fusée est à plus de 60 m pour $t \in [2; 6]$.

Elle reste donc **4 secondes** au-dessus de 60 m.

— **Contrôle** : $h(2) = -20 + 80 = 60$ ✓, $h(4) = -80 + 160 = 80 > 60$ ✓ et
 $h(6) = -180 + 240 = 60$ ✓

Cohérence. Le sommet est atteint en $t = 4$ s, au milieu de l'intervalle, à 80 m : c'est l'altitude maximale.

Réponse. Entre $t = 2$ s et $t = 6$ s, soit pendant 4 secondes.

Correction de l'exercice 16 - Une aire trop petite

— **Longueur** : la demi-somme des dimensions vaut 12, donc la longueur est $12 - x$.

— **Aire** : $A(x) = x(12 - x) = -x^2 + 12x$.

— On résout $A(x) < 20$:

$$-x^2 + 12x - 20 < 0$$

— On multiplie par -1 , ce qui retourne l'inégalité : $x^2 - 12x + 20 > 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 144 - 80 = 64$, $\sqrt{\Delta} = 8$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{12-8}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{12+8}{2} = 10$.

— Le trinôme est positif à l'extérieur de $[2; 10]$. En croisant avec le domaine $]0; 12[$:
 $S =]0; 2[\cup]10; 12[$

— **Contrôle** : $x = 1$ donne une aire de $11 < 20$ ✓ ; $x = 6$ (le carré) donne $36 > 20$ ✓

Lecture. L'aire n'est petite que si le rectangle est très **aplati**, dans un sens ou dans l'autre.

Réponse. $x \in]0; 2[\cup]10; 12[$.