

Plaquette 5 - Synthèse : formes, signe, équations et modélisation**Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths**

Corrections détaillées

Boîte à outils**Les trois formes et leurs usages.**

Question posée	Forme à utiliser
valeur en un point, ordonnée à l'origine	développée $ax^2 + bx + c$
sommet, extremum, axe de symétrie	canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$
racines, signe, inéquation	factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha) \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Relations racines-coefficients (degré 2) :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Discuter selon un paramètre. Toujours traiter à part le cas où le coefficient de x^2 s'annule, puis étudier le **signe du discriminant** en fonction du paramètre.

Tangence. Une droite est tangente à une parabole lorsque l'équation obtenue en égalant leurs expressions a un **discriminant nul**.

Démontrer une inégalité. On ramène tout d'un côté, on factorise, puis on lit le signe. Un carré est toujours positif ou nul : $(x - \alpha)^2 \geq 0$ est l'argument le plus utilisé.

Degré 4 bicarré. $ax^4 + bx^2 + c$: on pose $X = x^2$, on factorise en X , puis on revient à x .

Correction de l'exercice 1 - Passer d'une forme à l'autre**Forme canonique.**

$$\alpha = -\frac{-12}{6} = 2 \quad \beta = f(2) = 12 - 24 + 9 = -3$$

$$f(x) = 3(x - 2)^2 - 3$$

— **Contrôle** : $3(x^2 - 4x + 4) - 3 = 3x^2 - 12x + 12 - 3 \checkmark$

Forme factorisée. On peut partir de la canonique : $3(x - 2)^2 = 3$ donne $(x - 2)^2 = 1$, donc $x = 1$ ou $x = 3$.

$$f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$$

— **Contrôle par le discriminant** : $\Delta = 144 - 108 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$, racines $\frac{12 \pm 6}{6}$, soit 1 et 3 $\checkmark$

— **Contrôle par développement** : $3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9 \checkmark$

Les trois écritures décrivent la même fonction : on choisit celle qui répond à la question posée.

Réponse. $f(x) = 3(x - 2)^2 - 3 = 3(x - 1)(x - 3)$.

Correction de l'exercice 2 - Quelle forme pour quelle question ?

a) L'ordonnée à l'origine est $g(0)$: on remplace directement dans la forme donnée.

$$g(0) = -2 \times 1 + 18 = 16$$

b) La **forme canonique** se lit telle quelle : $a = -2 < 0$, donc g admet un **maximum** égal à 18, atteint en $x = -1$.

c) On résout $-2(x+1)^2 + 18 = 0$, soit $(x+1)^2 = 9$, donc $x+1 = 3$ ou $x+1 = -3$: les racines sont 2 et -4.

d) La **forme factorisée** $g(x) = -2(x-2)(x+4)$ donne le signe : $a < 0$, donc g est positif **entre** les racines.

$$S = [-4; 2]$$

— **Contrôle** : $g(0) = 16 > 0$, et 0 est bien entre -4 et 2 ✓

Morale. Aucune des quatre questions n'a nécessité de développer : la forme canonique donnait tout.

Réponse. a) 16 — b) maximum 18 en -1 — c) -4 et 2 — d) $[-4; 2]$.

Correction de l'exercice 3 - Un paramètre au coefficient dominant

Cas $m = 1$. L'équation devient $2x + 1 = 0$: elle est du **premier degré** et admet une unique solution, $x = -\frac{1}{2}$.

Cas $m \neq 1$. L'équation est du second degré, de discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4(m-1) \times 1 = 4 - 4m + 4 = 8 - 4m$$

— $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 2$: **deux** solutions ;

— $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$: **une** solution double, $x = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$;

— $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 2$: **aucune** solution.

Bilan. Deux solutions si $m < 2$ et $m \neq 1$; une solution si $m = 1$ (équation affine) ou $m = 2$ (racine double) ; aucune si $m > 2$.

— **Contrôle avec $m = 2$** : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, racine double -1 ✓

Réponse. $m < 2$ et $m \neq 1$: 2 solutions ; $m = 1$ ou $m = 2$: 1 solution ; $m > 2$: aucune.

Correction de l'exercice 4 - Une racine double de l'autre

On note x_1 et $x_2 = 2x_1$ les deux racines. Les relations du cours donnent :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6 \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m$$

— **Somme** : $x_1 + 2x_1 = 3x_1 = 6$, donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$.

— **Produit** : $m = x_1 x_2 = 2 \times 4 = 8$.

— **Vérification** : pour $m = 8$, l'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$ a pour discriminant $36 - 32 = 4$, et pour racines $\frac{6 \pm 2}{2}$, soit 2 et 4 ✓ — la seconde est bien le double de la première.

$$m = 8 \quad S = \{2; 4\}$$

Méthode. Quand une **relation entre les racines** est imposée, on n'utilise pas le discriminant : on traduit la condition dans la somme et le produit.

Réponse. $m = 8$, racines 2 et 4.

Correction de l'exercice 5 - Un degré 4 qui se factorise

Changement d'inconnue. On pose $X = x^2$: le polynôme devient un trinôme.

$$X^2 - 5X + 4$$

— **Discriminant** : $\Delta = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$, racines $\frac{5 \pm 3}{2}$, soit 1 et 4.

— Donc $X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$, c'est-à-dire :

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

— Chacun des deux facteurs est une différence de carrés :

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

— **Contrôle** : $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$, dont le produit vaut $x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4$ ✓

— **Contrôle numérique** : $P(0) = 4$, et $(-1)(1)(-2)(2) = 4$ ✓

Les racines de P sont -2 , -1 , 1 et 2 : un polynôme de degré 4 peut en avoir quatre.

Réponse. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Correction de l'exercice 6 - Une inéquation de degré 4

On utilise la factorisation complète $(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$, dont les racines sont -2 , -1 , 1 et 2 .

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; -1[$	$] -1 ; 1[$	$] 1 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $x^2 - 1$	+	+	-	+	+
Signe de $x^2 - 4$	+	-	-	-	+
Signe du produit	+	-	+	-	+

L'inégalité est large : les quatre racines sont incluses.

$$S =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; 1] \cup [2 ; +\infty[$$

— **Contrôle** : $x = 0$ donne $(-1) \times (-4) = 4 \geq 0$ ✓ ; $x = 1,5$ donne $1,25 \times (-1,75) < 0$ ✓ ;
 $x = 3$ donne $8 \times 5 = 40 \geq 0$ ✓

Raccourci. Chaque facteur est un trinôme en x : deux lignes suffisent, pas besoin d'en faire quatre.

Réponse. $S =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; 1] \cup [2 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 7 - Démontrer une inégalité

On ramène tout d'un côté :

$$x^2 + 4 \geq 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

— On reconnaît une **identité remarquable** :

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

— Un carré est toujours positif ou nul : l'inégalité est donc vraie pour tout réel x .

Cas d'égalité. $(x - 2)^2 = 0$ équivaut à $x = 2$: l'égalité $x^2 + 4 = 4x$ n'a lieu que pour $x = 2$, où les deux membres valent 8.

— **Contrôle** : $x = 0$ donne $4 \geq 0$ ✓ ; $x = 5$ donne $29 \geq 20$ ✓ ; $x = 1$ donne $5 \geq 4$ ✓

Technique à retenir. Pour comparer deux expressions, on étudie le **signe de leur**

différence — jamais en « passant les termes de l'autre côté » d'une inégalité qu'on manipulerait comme une égalité.

Réponse. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$; égalité seulement pour $x = 2$.

Correction de l'exercice 8 - Une inégalité vraie seulement sur un intervalle

Différence :

$$x^3 + 1 - (x^2 + x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

— **Factorisation par regroupement** : $x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1)$.

— Or $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc :

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$$

— **Signe.** $(x - 1)^2 \geq 0$ toujours : le signe du produit est donc celui de $x + 1$, sauf en $x = 1$ où le produit s'annule.

Intervalle	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; +\infty [$
Signe de $(x - 1)^2(x + 1)$	-	+

$$S = [-1 ; +\infty[$$

— **Contrôle** : $x = 0$ donne $1 \geq 0$ ✓ ; $x = -2$ donne $-7 \geq 2$, faux ✓ ; $x = 1$ donne $2 \geq 2$, égalité ✓

Attention. Un facteur au carré **ne change pas** le signe du produit, mais il ajoute une valeur où l'expression s'annule.

Réponse. $S = [-1 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - Une droite tangente à la parabole

Traduction de la tangence. Les points communs vérifient :

$$x^2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - x - m = 0$$

Une droite est tangente à la parabole lorsqu'il y a **exactement un** point commun, c'est-à-dire lorsque le discriminant est nul.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m$$

— $\Delta = 0$ donne $1 + 4m = 0$, soit $m = -\frac{1}{4}$.

— **Point de contact** : la racine double vaut $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, d'où $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Le point de contact est $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

— **Vérification** : la droite $y = x - \frac{1}{4}$ passe par $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ ✓, et $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ ne s'annule qu'une fois ✓

Réponse. $m = -\frac{1}{4}$, point de contact $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 10 - Une parabole au-dessus d'une droite

Traduction. La parabole est strictement au-dessus de la droite lorsque, pour tout réel x :

$$x^2 + mx + 1 > x \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + 1 > 0$$

Un trinôme de coefficient dominant $1 > 0$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** son discriminant est strictement négatif.

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4 < 0$$

— On factorise : $(m - 1)^2 - 4 = (m - 1 - 2)(m - 1 + 2) = (m - 3)(m + 1)$.

— Ce trinôme en m est négatif **entre** ses racines -1 et 3 :

$$m \in]-1 ; 3[$$

— **Contrôle avec** $m = 1$: $x^2 + 1 > 0$ pour tout x ✓

— **Contrôle avec** $m = 3$: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ s'annule en -1 , il y a contact : la borne est bien exclue ✓

Réponse. $m \in]-1 ; 3[$.

Correction de l'exercice 11 - Les deux carrés

— **Inconnue** : x le côté du premier carré, en centimètres, avec $0 < x < 16$. Le second mesure $16 - x$.

— **Mise en équation** :

$$x^2 + (16 - x)^2 = 130$$

— On développe : $x^2 + 256 - 32x + x^2 = 130$, soit $2x^2 - 32x + 126 = 0$.

— On divise par 2 : $x^2 - 16x + 63 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 256 - 252 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{16-2}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{16+2}{2} = 9$.

— Les deux valeurs conviennent et décrivent **la même** paire de carrés : l'un a un côté de 7 cm, l'autre de 9 cm.

— **Vérification** : $7 + 9 = 16$ ✓ et $49 + 81 = 130$ ✓

Remarque. Quand le problème est **symétrique** en ses deux inconnues, les deux racines donnent la même solution, lue dans un ordre ou dans l'autre.

Réponse. Les côtés mesurent 7 cm et 9 cm.

Correction de l'exercice 12 - La température de la serre

a) **Sommet** :

$$\alpha = -\frac{-6}{2 \times 0,5} = 6 \quad \beta = T(6) = 18 - 36 + 30 = 12$$

— $a = 0,5 > 0$: la température est **minimale** au bout de 6 h et vaut 12 °C.

— b) On résout $T(t) \leq 20$:

$$0,5t^2 - 6t + 30 \leq 20 \Leftrightarrow 0,5t^2 - 6t + 10 \leq 0$$

— On multiplie par 2 : $t^2 - 12t + 20 \leq 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 144 - 80 = 64$, $\sqrt{\Delta} = 8$, racines $\frac{12 \pm 8}{2}$, soit 2 et 10.

— Le trinôme est négatif entre ses racines :

$$S = [2 ; 10]$$

— La température reste sous 20 °C de la 2^e à la 10^e heure, soit pendant 8 heures.

— **Contrôle** : $T(2) = 2 - 12 + 30 = 20$ ✓ et $T(0) = 30 > 20$ ✓

Réponse. a) minimum 12 °C à $t = 6$ h — b) de $t = 2$ h à $t = 10$ h.

Correction de l'exercice 13 - Une équation quotient de degré 3

Domaine. $x \neq 2$.

Simplification. On utilise l'identité :

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

- Pour $x \neq 2$, le quotient se simplifie : $\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$.
- L'équation devient $x^2 + 2x + 4 = 12$, soit $x^2 + 2x - 8 = 0$.
- **Discriminant** : $\Delta = 4 + 32 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$, racines $\frac{-2 \pm 6}{2}$, soit 2 et -4.
- **La valeur 2 est interdite** : on la rejette.

$$S = \{-4\}$$

- **Vérification** : $\frac{(-4)^3 - 8}{-4 - 2} = \frac{-72}{-6} = 12 \checkmark$

Leçon. Une solution de l'équation simplifiée n'est acceptable que si elle appartient au domaine de départ : c'est pour cela qu'on écrit le domaine **avant** de simplifier.

Réponse. $S = \{-4\}$.

Correction de l'exercice 14 - Racines et coefficients au degré 3

Ici $a = 2$, $b = -3$, $c = -11$ et $d = 6$.

Somme des racines.

$$-2 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

Les deux valeurs coïncident $\checkmark$

Produit des racines.

$$(-2) \times \frac{1}{2} \times 3 = -3 \quad \text{et} \quad -\frac{d}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

Les deux valeurs coïncident $\checkmark$

Pour aller plus loin. La somme des produits deux à deux vaut $\frac{c}{a}$:

$$(-2) \times \frac{1}{2} + (-2) \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 = -1 - 6 + \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}$$

$$\text{et } \frac{c}{a} = -\frac{11}{2} \checkmark$$

D'où cela vient. En développant $2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$, les coefficients obtenus sont exactement ces sommes et produits : les relations ne sont rien d'autre que l'identification des coefficients.

Réponse. Somme = $\frac{3}{2} = -\frac{b}{a}$; produit = $-3 = -\frac{d}{a}$.

Correction de l'exercice 15 - Le bloc de bois retaillé

- **Mise en équation.** Le nouveau solide est un pavé de dimensions x , $x + 2$ et $x - 1$, avec $x > 1$:

$$x(x + 2)(x - 1) = 72$$

- On développe : $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$, puis $x(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x$.

- L'équation devient $x^3 + x^2 - 2x - 72 = 0$.
- **Racine évidente** : pour $x = 4$, $64 + 16 - 8 - 72 = 0$ ✓
- **Factorisation** : $(x - 4)(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $-4\gamma = -72$, donc $\gamma = 18$; et $\beta - 4 = 1$, donc $\beta = 5$. Vérification du terme en x : $\gamma - 4\beta = 18 - 20 = -2$ ✓

$$x^3 + x^2 - 2x - 72 = (x - 4)(x^2 + 5x + 18)$$

- Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 72 = -47 < 0$: aucune racine réelle.
- La seule solution est $x = 4$, compatible avec $x > 1$.
- **Vérification** : $4 \times 6 \times 3 = 72$ ✓

L'arête du cube initial mesurait 4 cm (son volume était de 64 cm^3 : le bloc retaillé a gagné 8 cm^3).

Réponse. $x = 4 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 16 - Courbe et droite, du graphique au calcul

- a) Les deux tracés se coupent en trois points, d'abscisses approximativement -2 , 0 et 2 .
- b) On résout :

$$x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

- Donc $x(x - 2)(x + 2) = 0$: les solutions sont -2 , 0 et 2 , ce qui **confirme** la conjecture.
- c) On étudie le signe de $P(x) - g(x) = x(x - 2)(x + 2)$.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 0[$	$] 0 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $x(x - 2)(x + 2)$	—	+	—	+

- $P(x) \leq g(x)$ correspond aux intervalles négatifs, bornes comprises :

$$S =]-\infty ; -2] \cup [0 ; 2]$$

- **Contrôle graphique** : la courbe est bien sous la droite à gauche de -2 et entre 0 et 2 ✓

Rappel de méthode. Une lecture graphique **conjecture**, elle ne démontre pas : seul le calcul conclut.

Réponse. a) et b) $x \in \{-2 ; 0 ; 2\}$ — c) $] -\infty ; -2] \cup [0 ; 2]$.