

Plaquette 4 – Polynômes de degré 3 : racine évidente et factorisation

Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths

Exercices

Méthode

Un polynôme de degré 3 ne se résout pas par une formule : on cherche une **racine évidente**, on factorise par $(x - a)$ grâce à l'**identification des coefficients**, et il ne reste qu'un trinôme. C'est la méthode attendue au bac, et elle marche à tous les coups quand l'énoncé fournit la racine.

Exercice 1 – Reconnaître un polynôme de degré 3

Pour chaque expression, donner le degré et, si le degré vaut 3, les coefficients a , b , c et d de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$

b) $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 4)$

c) $R(x) = x^2(x + 3) - x^3$

Exercice 2 – Chercher les racines évidentes

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Calculer $P(1)$, $P(-1)$ et $P(3)$, puis en déduire la factorisation complète de P .

Exercice 3 – Factoriser par identification

Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

a) Vérifier que 1 est racine de P .

b) Déterminer les réels β et γ tels que $P(x) = (x - 1)(x^2 + \beta x + \gamma)$.

c) Résoudre $P(x) = 0$.

Exercice 4 – Quand le coefficient dominant n'est pas 1

Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$. Sachant que 3 est une racine de P , factoriser $P(x)$ puis résoudre $P(x) = 0$.

Exercice 5 – Trouver soi-même la racine

Résoudre $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$. On cherchera d'abord une racine entière simple.

Exercice 6 – Sans terme constant

Résoudre $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

Exercice 7 - Le signe d'un polynôme de degré 3

On a établi que $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x - 3)(2x - 1)(x + 2)$.

Résoudre $P(x) \leq 0$.

Exercice 8 - Une seule solution

Résoudre $x^3 = 8$ et démontrer qu'il n'y a pas d'autre solution réelle.

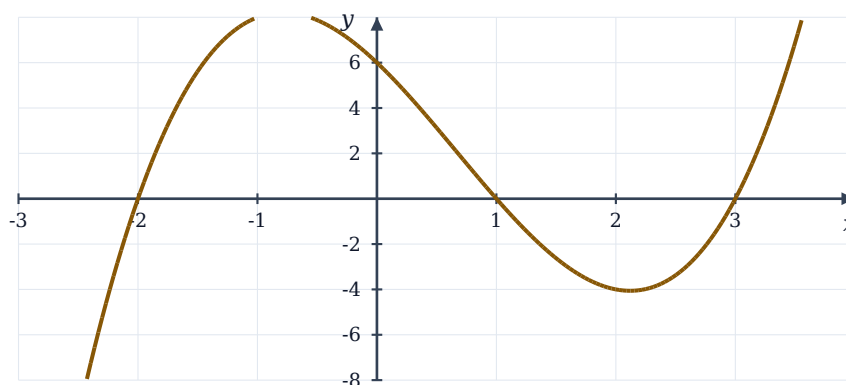
Exercice 9 - Construire un polynôme de degré 3

Déterminer la forme développée du polynôme P de degré 3, de coefficient dominant 2, dont les racines sont -2 , 1 et 4 .

Exercice 10 - Lire une courbe de degré 3

La courbe ci-dessous représente un polynôme P de degré 3 de coefficient dominant 1.

- Lire les racines de P .
- En déduire la forme factorisée puis la forme développée de $P(x)$.
- Résoudre graphiquement $P(x) \geq 0$.



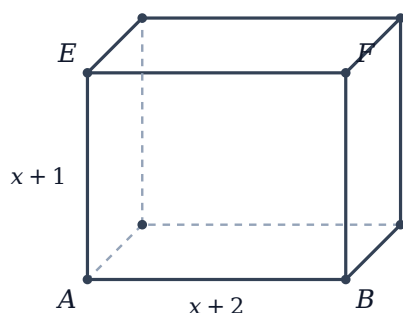
Courbe de P

Exercice 11 - Intersection avec une parabole

Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^3$ et de la parabole d'équation $y = 3x^2 - 2x$.

Exercice 12 – Trois dimensions consécutives

Un pavé droit a pour dimensions x , $x + 1$ et $x + 2$ centimètres, et un volume de 60 cm^3 . Déterminer x .



Pavé de dimensions x , $x + 1$ et $x + 2$

Exercice 13 – La boîte sans couvercle

Dans une plaque carrée de 20 cm de côté, on découpe un carré de côté x à chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle, avec $0 < x < 10$.

a) Montrer que le volume de la boîte est $V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$.

b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le volume vaut 576 cm^3 . On donnera une valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

Exercice 14 – Deux racines et un point

Un polynôme P de degré 3 admet pour racines 1 , -2 et 3 , et vérifie $P(0) = 12$. Déterminer $P(x)$.

Exercice 15 – Une factorisation qui prouve une divisibilité

Soit n un entier naturel. Démontrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 .

Exercice 16 – À partir de quand est-ce rentable ?

Une entreprise produit x tonnes d'un composant, avec $0 < x \leq 10$. Son coût total, en milliers d'euros, est $C(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$, et chaque tonne est vendue 22 milliers d'euros.

Déterminer les productions pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice positif ou nul.