

Plaquette 5 - Synthèse : formes, signe, équations et modélisation

Polynômes de degré 2 et 3 — Première spé maths

Exercices

Méthode

Une plaquette de synthèse : choisir la **bonne forme** selon la question, discuter selon un **paramètre**, démontrer une inégalité par factorisation, et modéliser. La question n'est plus « comment calcule-t-on ? » mais « quel outil répond le plus vite ? ».

Exercice 1 - Passer d'une forme à l'autre

Soit $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Donner la forme canonique et la forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 2 - Quelle forme pour quelle question ?

On donne $g(x) = -2(x + 1)^2 + 18$. Répondre à chaque question en précisant la forme utilisée.

- a) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la courbe ?
- b) Quel est le maximum de g ?
- c) Quelles sont les racines de g ?
- d) Sur quel intervalle a-t-on $g(x) \geq 0$?

Exercice 3 - Un paramètre au coefficient dominant

Discuter, selon les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $(m - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$.

Exercice 4 - Une racine double de l'autre

Déterminer le réel m pour que l'équation $x^2 - 6x + m = 0$ admette deux racines dont l'une est le double de l'autre. Donner alors ces racines.

Exercice 5 - Un degré 4 qui se factorise

Factoriser complètement $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Exercice 6 - Une inéquation de degré 4

Résoudre $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \geq 0$.

Exercice 7 - Démontrer une inégalité

Démontrer que, pour tout réel x , $x^2 + 4 \geq 4x$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 8 - Une inégalité vraie seulement sur un intervalle

Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $x^3 + 1 \geq x^2 + x$.

Exercice 9 - Une droite tangente à la parabole

Déterminer le réel m pour que la droite d'équation $y = x + m$ soit tangente à la parabole d'équation $y = x^2$. Donner alors le point de contact.

Exercice 10 - Une parabole au-dessus d'une droite

Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles la parabole d'équation $y = x^2 + mx + 1$ est strictement au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 11 - Les deux carrés

Deux carrés ont des côtés dont la somme vaut 16 cm et des aires dont la somme vaut 130 cm². Déterminer la longueur de leurs côtés.

Exercice 12 - La température de la serre

Dans une serre, la température (en °C) au bout de t heures est modélisée par $T(t) = 0,5t^2 - 6t + 30$, pour $0 \leq t \leq 12$.

- a) À quel instant la température est-elle minimale, et combien vaut-elle ?
- b) Pendant quelle période la température reste-t-elle inférieure ou égale à 20 °C ?

Exercice 13 - Une équation quotient de degré 3

Résoudre $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$.

Exercice 14 - Racines et coefficients au degré 3

On admet que $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ a pour racines -2 , $\frac{1}{2}$ et 3.

Vérifier que la somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$ et que leur produit vaut $-\frac{d}{a}$.

Exercice 15 - Le bloc de bois retaillé

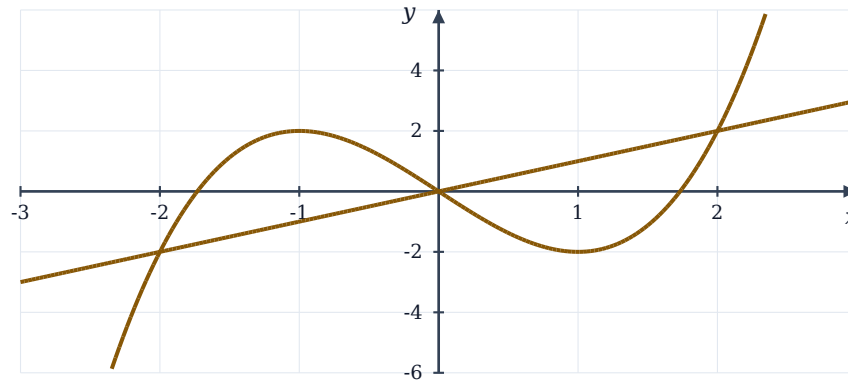
Un bloc de bois cubique a une arête de x centimètres. On allonge une arête de 2 cm et on en raccourcit une autre de 1 cm ; le volume obtenu vaut 72 cm³.

Déterminer x .

Exercice 16 – Courbe et droite, du graphique au calcul

La courbe ci-dessous représente $P(x) = x^3 - 3x$ et la droite représente $g(x) = x$.

- a) Conjecturer graphiquement les solutions de $P(x) = g(x)$.
- b) Démontrer cette conjecture par le calcul.
- c) Résoudre $P(x) \leq g(x)$.



Courbe de P et droite d'équation $y = x$