Plaquette 3 – Indépendance d'événements

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Formulation équivalente (si $P(A) \neq 0$) :

$$P_A(B) = P(B)$$

Savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B : c'est le sens intuitif de l'indépendance.

Ne pas confondre.

Notion	Définition	Conséquence
Incompatibles	$A \cap B = \varnothing$	$P(A \cap B) = 0$
Indépendants	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	$P_A(B) = P(B)$

Deux événements de probabilités non nulles **ne peuvent pas** être à la fois incompatibles et indépendants : s'ils sont incompatibles, savoir que A est réalisé rend B **impossible**, ce qui change tout.

Propriété utile. Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Répétition d'expériences identiques et indépendantes. Pour n répétitions d'une épreuve où le succès a la probabilité p :

$$P(\text{n succès}) = p^n \qquad P(\text{aucun succès}) = (1-p)^n$$

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1-p)^n$$

Le réflexe « au moins un » : on passe **toujours** par l'événement contraire « aucun ».

Correction de l'exercice 1 – Tester l'indépendance

On compare $P(A \cap B)$ au produit $P(A) \times P(B)$:

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

a) $0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$, égal à $P(A \cap B)$: les événements sont **indépendants**.

b) $0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18 \neq 0{,}2$: ils ne sont **pas** indépendants. Comme $P(A \cap B) > P(A)P(B)$, ils se « favorisent » : $P_A(B) = \dfrac{0{,}2}{0{,}3} \approx 0{,}667 > 0{,}6$.

c) $0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$: **indépendants**.

La bonne rédaction. On calcule le produit **séparément**, puis on compare : écrire directement « donc indépendants » sans montrer le produit ne vaut aucun point.

Un contrôle de cohérence. Dans tous les cas, $P(A \cap B)$ doit être inférieur ou égal au plus petit des deux : en c), $0{,}2 \leq 0{,}25$ ✓

Réponse. a) indépendants — b) non — c) indépendants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Indépendants ou incompatibles ?

a) **Formule de l'union** :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0$$

— L'intersection est de probabilité nulle : les événements sont **incompatibles**, ils ne peuvent pas se produire ensemble.

— b) **Test d'indépendance** : $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$, alors que $P(A \cap B) = 0$.

$$0 \neq 0{,}15$$

— Ils ne sont donc **pas indépendants**.

Le point à comprendre. Incompatibles et indépendants sont presque **contraires** l'un de l'autre. Si A et B sont incompatibles avec des probabilités non nulles, alors

$$P_A(B) = \frac{0}{P(A)} = 0 \neq P(B)$$

Savoir que A s'est produit rend B **impossible** : c'est l'information la plus forte possible, donc le contraire de l'indépendance.

Réponse. a) $P(A \cap B) = 0$, incompatibles — b) non indépendants.

Correction de l'exercice 3 – Le dé et la pièce

Univers. Les issues sont les couples (face du dé, côté de la pièce) : il y en a $6 \times 2 = 12$, équiprobables.

— **Probabilités simples** :

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

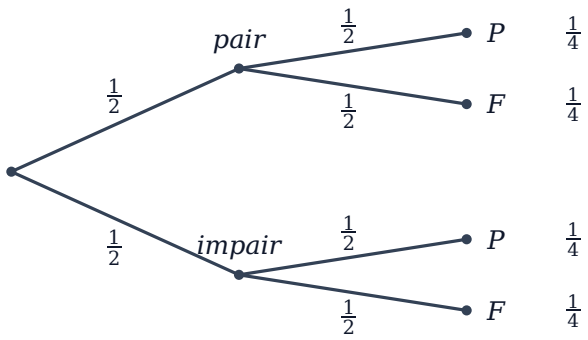
— **Intersection** : les issues favorables sont $(2\,;P)$, $(4\,;P)$ et $(6\,;P)$, soit 3 issues.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

— **Test** : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ✓

Les deux événements sont **indépendants**.

Lecture sur un arbre. Quel que soit le résultat du dé, la pièce donne pile avec probabilité $\frac{1}{2}$: les branches du second niveau sont **identiques**, c'est la marque de l'indépendance ($P_A(B) = P(B)$).



Le dé puis la pièce : branches identiques au second niveau

Pourquoi c'était prévisible. Les deux lancers portent sur des objets **physiquement séparés** : le résultat du dé n'a aucune influence sur celui de la pièce. Dans ce cas, l'indépendance est une conséquence de l'expérience, et le calcul ne fait que la confirmer.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Attention. Ce raisonnement physique ne remplace jamais le calcul dans un devoir : la définition est numérique.

Réponse. $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$: indépendants.

Correction de l'exercice 4 – Indépendance dans un tableau

On note H « être un homme » et F « être favorable ».

— **Probabilités simples** :

$$P(H) = \frac{200}{500} = 0{,}4 \qquad P(F) = \frac{300}{500} = 0{,}6$$

— **Intersection** : $P(H \cap F) = \frac{120}{500} = 0{,}24$.

— **Test** :

$$P(H) \times P(F) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$$

— L'égalité est vérifiée : les deux événements sont **indépendants**.

Vérification par les conditionnelles : $P_H(F) = \frac{120}{200} = 0{,}6$ et $P_F(H) = \frac{120}{300} = 0{,}4$.

Les proportions de personnes favorables sont **identiques** chez les hommes (60 %) et chez les femmes ($\frac{180}{300} = 60$ %) : l'opinion ne dépend pas du sexe dans cet échantillon.

Comment le repérer d'un coup d'œil. Dans un tableau, l'indépendance se lit sur les **proportions par ligne** : si elles sont identiques d'une ligne à l'autre, il y a indépendance.

Réponse. Oui : $P(H \cap F) = 0{,}24 = P(H) \times P(F)$.

Correction de l'exercice 5 – Utiliser l'indépendance

— **Intersection**, par définition de l'indépendance :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$$

— **Union** :

$$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}2 - 0{,}14 = 0{,}76$$

— **Conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}14}{0{,}2} = 0{,}7 = P(A)$$

— On retrouve bien la caractérisation de l'indépendance : $P_B(A) = P(A)$ ✓

Ce que l'indépendance simplifie. Elle permet de calculer l'intersection **sans aucune donnée supplémentaire** : c'est la seule situation où le produit des probabilités a un sens.

Erreur fréquente. Écrire $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}9$: cette formule n'est valable que pour des événements **incompatibles**, ce qui n'est pas le cas ici.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}14$, $P(A \cup B) = 0{,}76$, $P_B(A) = 0{,}7$.

Correction de l'exercice 6 – Passer au contraire

Décomposition de A. L'événement A se partage en deux selon que B est réalisé ou non :

$$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

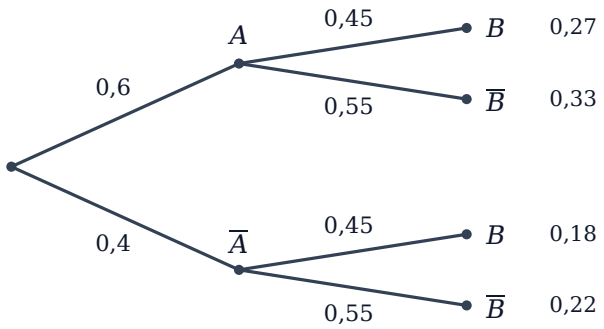
— On isole : $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$.

— **Par indépendance** : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \times P\left(\overline{B}\right)$$

— C'est exactement la définition de l'indépendance de A et $\overline{B}$ ✓

Sur un arbre, l'indépendance se voit : $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B) = 0{,}45$, donc $P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}55 = P\left(\overline{B}\right)$.



Indépendance : mêmes branches sous A et sous Ā

Application numérique :

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}6 \times 0{,}55 = 0{,}33$$

— **Contrôle** : $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}27$, et $0{,}27 + 0{,}33 = 0{,}6 = P(A)$ ✓

À retenir. L'indépendance « passe au contraire » : si deux événements sont indépendants, il en va de même pour leurs contraires, dans n'importe quelle combinaison.

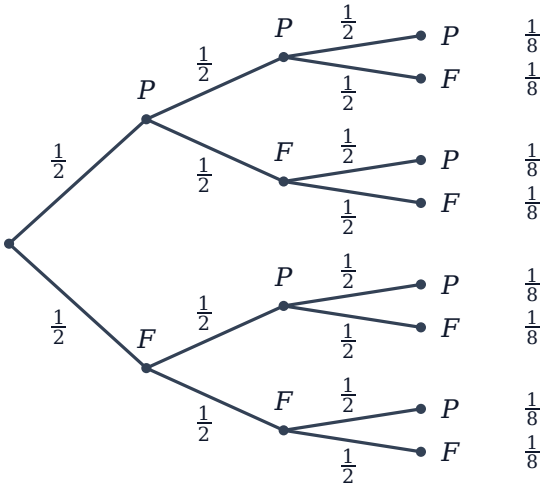
Réponse. $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A)P\left(\overline{B}\right) = 0{,}33$.

Correction de l'exercice 7 – Trois lancers

Les trois lancers sont **indépendants** : on multiplie les probabilités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre des trois lancers. Chaque branche vaut $\frac{1}{2}$ et chacun des 8 chemins a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$:



Trois lancers : huit chemins de probabilité 1/8

a) **Trois piles** :

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

b) **Le réflexe « au moins un »** : on passe par l'événement contraire, « aucune face », c'est-à-dire « trois piles ».

$$P(\text{au moins une face}) = 1 - P(\text{trois piles}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Pourquoi passer par le contraire ? Le calcul direct obligerait à additionner les cas « exactement une face », « exactement deux faces » et « trois faces », soit $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ — trois fois plus long pour le même résultat ✓

Généralisation. Pour n lancers, $P(\text{au moins une face}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, qui tend très vite vers 1 : dès 7 lancers, on dépasse 99 %.

Réponse. a) $\frac{1}{8}$ — b) $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Correction de l'exercice 8 – Le tir à l'arc

Les tirs sont indépendants et identiques : on **multiplie**.

a) **Quatre réussites** :

$$P = 0{,}8^4 = 0{,}4096$$

b) **Au moins un échec** est le contraire de « aucun échec », c'est-à-dire de « quatre réussites » :

$$P = 1 - 0{,}8^4 = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904$$

c) **Quatre échecs** :

$$P = 0{,}2^4 = 0{,}0016$$

Ce que ces nombres racontent. Un archer qui réussit 80 % de ses tirs a **moins d'une chance sur deux** de réussir une série de quatre : l'exigence se durcit très vite avec la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

longueur de la série.

— **Contrôle de cohérence** : $0{,}4096 < 0{,}8$ ✓ (une série est plus dure qu'un tir isolé) et $0{,}4096 + 0{,}5904 = 1$ ✓

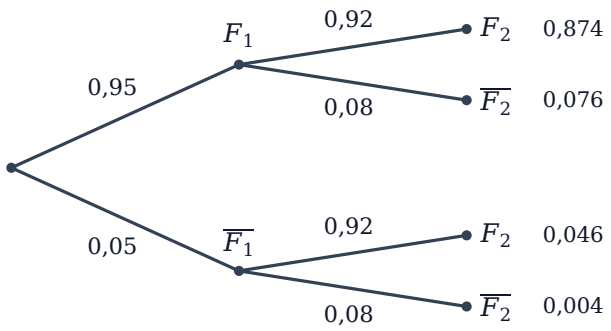
Attention à l'hypothèse. Tout repose sur l'indépendance des tirs : si l'archer se fatigue, le modèle ne tient plus.

Réponse. a) 0,4096 — b) 0,5904 — c) 0,0016.

Correction de l'exercice 9 – Deux machines en série

On note F_1 et F_2 « le composant i fonctionne », avec $P(F_1) = 0{,}95$ et $P(F_2) = 0{,}92$.

Arbre pondéré de la situation :



Composant 1 puis composant 2 (indépendants)

a) Le système fonctionne si les **deux** fonctionnent ; par indépendance :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}95 \times 0{,}92 = 0{,}874$$

b) « Au moins une panne » est le contraire de « le système fonctionne » :

$$P = 1 - 0{,}874 = 0{,}126$$

Le principe du montage en série. La fiabilité globale est **inférieure** à celle de chaque composant : 87,4 % alors que le plus faible atteint 92 %. Chaque élément ajouté dégrade l'ensemble.

Comparaison instructive. Avec dix composants à 95 % chacun, la fiabilité tomberait à $0{,}95^{10} \approx 0{,}599$: à peine six chances sur dix.

— **Contrôle** : $0{,}874 + 0{,}126 = 1$ ✓

Réponse. a) 0,874 — b) 0,126.

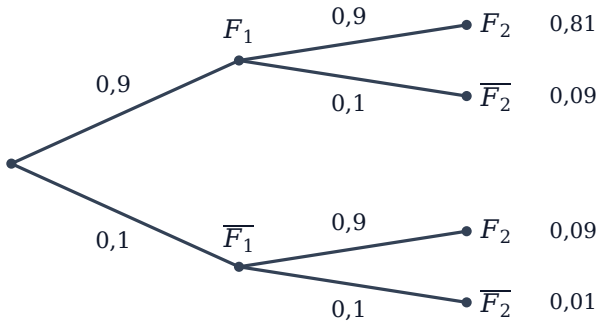
Correction de l'exercice 10 – Deux machines en parallèle

On passe par le contraire. Le réservoir n'est plus alimenté seulement si les **deux** pompes tombent en panne.

$$P(\text{les deux en panne}) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sur l'arbre (F_i : la pompe i fonctionne), trois chemins sur quatre alimentent le réservoir ; seul $\overline{F_1} \to \overline{F_2}$ ne le fait pas :



Pompe 1 puis pompe 2 : seul le dernier chemin coupe l'alimentation

— **Événement contraire** :

$$P(\text{alimenté}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

Le principe du montage en parallèle. La fiabilité globale, 99 %, est **supérieure** à celle de chaque pompe (90 %) : c'est tout l'intérêt de la redondance.

Comparaison avec le montage en série. Deux composants à 90 % donnent :

— en **série** (il faut les deux) : $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$;

— en **parallèle** (il en suffit un) : $1 - 0{,}1^2 = 0{,}99$.

Avec trois pompes : $1 - 0{,}1^3 = 0{,}999$. Chaque pompe ajoutée divise le risque de panne totale par dix.

Réponse. $P = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

Correction de l'exercice 11 – Le code à composer

a) Il y a $10^3 = 1000$ codes possibles, tous équiprobables :

$$P = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

b) **Par l'événement contraire** : échouer 5 fois de suite. Chaque échec a une probabilité de 0,999, et les essais sont indépendants :

$$P(\text{5 échecs}) = 0{,}999^5 \approx 0{,}99501$$

— Donc :

$$P(\text{au plus 5 essais}) = 1 - 0{,}999^5 \approx 0{,}00499$$

Ordre de grandeur. Environ 0,5 % : essayer cinq fois multiplie presque exactement par cinq la chance initiale, car celle-ci est très petite.

Combien d'essais pour une chance sur deux ? Il faudrait n tel que $0{,}999^n \leq 0{,}5$, soit environ 693 essais — près de sept cents tentatives pour une chance sur deux.

L'hypothèse du modèle. Une vraie personne **mémorise** ses essais : elle n'aurait besoin que de 500 essais en moyenne. L'indépendance n'est pas toujours réaliste.

Réponse. a) 0,001 — b) $1 - 0{,}999^5 \approx 0{,}005$.

Correction de l'exercice 12 – Indépendance et tableau à compléter

On combine les deux formules.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

— En remplaçant l'intersection :

$$0{,}7 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}4\,P(B)$$

— **On regroupe** : $0{,}7 - 0{,}4 = P(B)(1 - 0{,}4)$, soit

$$0{,}3 = 0{,}6\,P(B)$$

— D'où :

$$P(B) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$$

— **Vérification** : $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$, et $0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$ ✓

La technique. Une hypothèse d'indépendance remplace une inconnue ($P(A \cap B)$) par un produit : on se ramène alors à une **équation du premier degré** en $P(B)$.

Formule générale, obtenue de la même façon :

$$P(A \cup B) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

— **Contrôle** : $1 - 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}7$ ✓

Réponse. $P(B) = 0{,}5$.

Correction de l'exercice 13 – Un contre-exemple

Il y a 36 issues équiprobables.

a) $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$, et l'intersection correspond au seul couple $(6\,;6)$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

— Les deux événements sont **indépendants** : deux dés distincts ne s'influencent pas.

— b) La somme vaut 7 pour 6 couples : $(1\,;6)$, $(2\,;5)$, …, $(6\,;1)$, donc $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

— $A \cap C$ correspond au seul couple $(6\,;1)$:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \qquad P(A) \times P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

— L'égalité est vérifiée : A et C sont **indépendants** eux aussi.

Le résultat surprenant. Savoir que le premier dé donne 6 ne change **pas** la probabilité que la somme vaille 7 : elle reste $\frac{1}{6}$, car il reste toujours exactement une valeur du second dé qui convient.

La morale. L'indépendance est une propriété **numérique**, pas intuitive : ici deux événements manifestement liés par les mêmes dés sont pourtant indépendants.

Réponse. a) oui — b) oui, bien que la somme dépende du premier dé.

Correction de l'exercice 14 – Le taux de réponse

a) **Aucune réponse** : les 6 personnes ne répondent pas, chacune avec une probabilité de 0,65.

$$P = 0{,}65^6 \approx 0{,}0754$$

b) **Au moins une réponse**, par le contraire :

$$P = 1 - 0{,}65^6 \approx 0{,}9246$$

c) On cherche le plus petit entier n tel que

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$1 - 0{,}65^{n} > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}65^{n} < 0{,}01$$

— On teste à la calculatrice : $0{,}65^{10} \approx 0{,}0135$, encore trop grand ; $0{,}65^{11} \approx 0{,}00875 < 0{,}01$ ✓

— Il faut donc envoyer 11 **questionnaires**.

Méthode pour le seuil. On tabule les puissances successives jusqu'au dépassement ; un programme Python avec une boucle « tant que » fait la même chose en trois lignes.

Interprétation. Avec un taux de réponse d'un tiers, onze envois suffisent à être presque certain d'obtenir au moins un retour.

Réponse. a) $\approx 0{,}0754$ — b) $\approx 0{,}9246$ — c) $n = 11$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : dépendance ou indépendance ?

On note V « posséder une voiture » et B « posséder un vélo ».

a) **Test** :

$$P(V) \times P(B) = 0{,}55 \times 0{,}30 = 0{,}165$$

— Or $P(V \cap B) = 0{,}18 \neq 0{,}165$: les deux événements ne sont **pas indépendants**.

— Comme $0{,}18 > 0{,}165$, posséder une voiture **augmente** légèrement la probabilité d'avoir aussi un vélo.

— b) **Union** :

$$P(V \cup B) = 0{,}55 + 0{,}30 - 0{,}18 = 0{,}67$$

— Deux habitants sur trois possèdent au moins l'un des deux ; 33 % n'ont ni l'un ni l'autre.

— c) **Conditionnelle** :

$$P_V(B) = \frac{0{,}18}{0{,}55} \approx 0{,}327$$

— À comparer à $P(B) = 0{,}30$: la probabilité passe de 30 % à 32,7 %, un écart faible mais réel.

Conclusion nuancée. La dépendance existe, mais elle est **ténue** : sur un échantillon plus petit, cet écart pourrait n'être dû qu'au hasard de l'échantillonnage.

Réponse. a) non ($0{,}18 \neq 0{,}165$) — b) 0,67 — c) $\approx 0{,}327$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).