

Plaquette 3 – Indépendance d'événements

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Formulation équivalente (si $P(A) \neq 0$) :

$$P_A(B) = P(B)$$

Savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B : c'est le sens intuitif de l'indépendance.

Ne pas confondre.

Notion	Définition	Conséquence
Incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	$P(A \cap B) = 0$
Indépendants	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	$P_A(B) = P(B)$

Deux événements de probabilités non nulles **ne peuvent pas** être à la fois incompatibles et indépendants : s'ils sont incompatibles, savoir que A est réalisé rend B **impossible**, ce qui change tout.

Propriété utile. Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Répétition d'expériences identiques et indépendantes. Pour n répétitions d'une épreuve où le succès a la probabilité p :

$$P(n \text{ succès}) = p^n \quad P(\text{aucun succès}) = (1 - p)^n$$

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n$$

Le réflexe « au moins un » : on passe **toujours** par l'événement contraire « aucun ».

Correction de l'exercice 1 – Tester l'indépendance

On compare $P(A \cap B)$ au produit $P(A) \times P(B)$:

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

a) $0,4 \times 0,5 = 0,2$, égal à $P(A \cap B)$: les événements sont **indépendants**.

b) $0,3 \times 0,6 = 0,18 \neq 0,2$: ils ne sont **pas** indépendants. Comme $P(A \cap B) > P(A)P(B)$, ils se « favorisent » : $P_A(B) = \frac{0,2}{0,3} \approx 0,667 > 0,6$.

c) $0,25 \times 0,8 = 0,2$: **indépendants**.

La bonne rédaction. On calcule le produit **séparément**, puis on compare : écrire directement « donc indépendants » sans montrer le produit ne vaut aucun point.

Un contrôle de cohérence. Dans tous les cas, $P(A \cap B)$ doit être inférieur ou égal au plus petit des deux : en c), $0,2 \leq 0,25$ ✓

Réponse. a) indépendants — b) non — c) indépendants.

Correction de l'exercice 2 - Indépendants ou incompatibles ?

a) **Formule de l'union** :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,8 = 0$$

— L'intersection est de probabilité nulle : les événements sont **incompatibles**, ils ne peuvent pas se produire ensemble.

— b) **Test d'indépendance** : $P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$, alors que $P(A \cap B) = 0$.
 $0 \neq 0,15$

— Ils ne sont donc **pas indépendants**.

Le point à comprendre. Incompatibles et indépendants sont presque **contraires** l'un de l'autre. Si A et B sont incompatibles avec des probabilités non nulles, alors

$$P_A(B) = \frac{0}{P(A)} = 0 \neq P(B)$$

Savoir que A s'est produit rend B **impossible** : c'est l'information la plus forte possible, donc le contraire de l'indépendance.

Réponse. a) $P(A \cap B) = 0$, incompatibles — b) non indépendants.

Correction de l'exercice 3 - Le dé et la pièce

Univers. Les issues sont les couples (face du dé, côté de la pièce) : il y en a $6 \times 2 = 12$, équiprobables.

— **Probabilités simples** :

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

— **Intersection** : les issues favorables sont $(2; P)$, $(4; P)$ et $(6; P)$, soit 3 issues.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

— **Test** : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \checkmark$

Les deux événements sont **indépendants**.

Pourquoi c'était prévisible. Les deux lancers portent sur des objets **physiquement séparés** : le résultat du dé n'a aucune influence sur celui de la pièce. Dans ce cas, l'indépendance est une conséquence de l'expérience, et le calcul ne fait que la confirmer.

Attention. Ce raisonnement physique ne remplace jamais le calcul dans un devoir : la définition est numérique.

Réponse. $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$: indépendants.

Correction de l'exercice 4 - Indépendance dans un tableau

On note H « être un homme » et F « être favorable ».

— **Probabilités simples** :

$$P(H) = \frac{200}{500} = 0,4 \quad P(F) = \frac{300}{500} = 0,6$$

— **Intersection** : $P(H \cap F) = \frac{120}{500} = 0,24$.

— **Test** :

$$P(H) \times P(F) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$$

— L'égalité est vérifiée : les deux événements sont **indépendants**.

Vérification par les conditionnelles : $P_H(F) = \frac{120}{200} = 0,6$ et $P_F(H) = \frac{120}{300} = 0,4$.

Les proportions de personnes favorables sont **identiques** chez les hommes (60 %) et chez les femmes ($\frac{180}{300} = 60\%$) : l'opinion ne dépend pas du sexe dans cet échantillon.

Comment le repérer d'un coup d'œil. Dans un tableau, l'indépendance se lit sur les **proportions par ligne** : si elles sont identiques d'une ligne à l'autre, il y a indépendance.

Réponse. Oui : $P(H \cap F) = 0,24 = P(H) \times P(F)$.

Correction de l'exercice 5 - Utiliser l'indépendance

— **Intersection**, par définition de l'indépendance :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$$

— **Union** :

$$P(A \cup B) = 0,7 + 0,2 - 0,14 = 0,76$$

— **Conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,14}{0,2} = 0,7 = P(A)$$

— On retrouve bien la caractérisation de l'indépendance : $P_B(A) = P(A)$ ✓

Ce que l'indépendance simplifie. Elle permet de calculer l'intersection **sans aucune donnée supplémentaire** : c'est la seule situation où le produit des probabilités a un sens.

Erreur fréquente. Écrire $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,9$: cette formule n'est valable que pour des événements **incompatibles**, ce qui n'est pas le cas ici.

Réponse. $P(A \cap B) = 0,14$, $P(A \cup B) = 0,76$, $P_B(A) = 0,7$.

Correction de l'exercice 6 - Passer au contraire

Décomposition de A. L'événement A se partage en deux selon que B est réalisé ou non :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

— On isole : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

— **Par indépendance** : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \times P(\bar{B})$$

— C'est exactement la définition de l'indépendance de A et $\bar{B}$ ✓

Application numérique :

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$$

— **Contrôle** : $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,45 = 0,27$, et $0,27 + 0,33 = 0,6 = P(A)$ ✓

À retenir. L'indépendance « passe au contraire » : si deux événements sont indépendants, il en va de même pour leurs contraires, dans n'importe quelle combinaison.

Réponse. $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0,33$.

Correction de l'exercice 7 – Trois lancers

Les trois lancers sont **indépendants** : on multiplie les probabilités.

a) **Trois piles** :

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$$

b) **Le réflexe « au moins un »** : on passe par l'événement contraire, « aucune face », c'est-à-dire « trois piles ».

$$P(\text{au moins une face}) = 1 - P(\text{trois piles}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Pourquoi passer par le contraire ? Le calcul direct obligerait à additionner les cas « exactement une face », « exactement deux faces » et « trois faces », soit $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ — trois fois plus long pour le même résultat ✓

Généralisation. Pour n lancers, $P(\text{au moins une face}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, qui tend très vite vers 1 : dès 7 lancers, on dépasse 99 %.

Réponse. a) $\frac{1}{8}$ — b) $\frac{7}{8} = 0,875$.

Correction de l'exercice 8 – Le tir à l'arc

Les tirs sont indépendants et identiques : on **multiplie**.

a) **Quatre réussites** :

$$P = 0,8^4 = 0,4096$$

b) **Au moins un échec** est le contraire de « aucun échec », c'est-à-dire de « quatre réussites » :

$$P = 1 - 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904$$

c) **Quatre échecs** :

$$P = 0,2^4 = 0,0016$$

Ce que ces nombres racontent. Un archer qui réussit 80 % de ses tirs a **moins d'une chance sur deux** de réussir une série de quatre : l'exigence se durcit très vite avec la longueur de la série.

— **Contrôle de cohérence** : $0,4096 < 0,8$ ✓ (une série est plus dure qu'un tir isolé) et $0,4096 + 0,5904 = 1$ ✓

Attention à l'hypothèse. Tout repose sur l'indépendance des tirs : si l'archer se fatigue, le modèle ne tient plus.

Réponse. a) 0,4096 — b) 0,5904 — c) 0,0016.

Correction de l'exercice 9 – Deux machines en série

On note F_1 et F_2 « le composant i fonctionne », avec $P(F_1) = 0,95$ et $P(F_2) = 0,92$.

a) Le système fonctionne si les **deux** fonctionnent ; par indépendance :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0,95 \times 0,92 = 0,874$$

b) « Au moins une panne » est le contraire de « le système fonctionne » :

$$P = 1 - 0,874 = 0,126$$

Le principe du montage en série. La fiabilité globale est **inférieure** à celle de chaque composant : 87,4 % alors que le plus faible atteint 92 %. Chaque élément ajouté dégrade l'ensemble.

Comparaison instructive. Avec dix composants à 95 % chacun, la fiabilité tomberait à $0,95^{10} \approx 0,599$: à peine six chances sur dix.

— **Contrôle** : $0,874 + 0,126 = 1 \checkmark$

Réponse. a) 0,874 — b) 0,126.

Correction de l'exercice 10 – Deux machines en parallèle

On passe par le contraire. Le réservoir n'est plus alimenté seulement si les **deux** pompes tombent en panne.

$$P(\text{les deux en panne}) = 0,1 \times 0,1 = 0,01$$

— **Événement contraire** :

$$P(\text{alimenté}) = 1 - 0,01 = 0,99$$

Le principe du montage en parallèle. La fiabilité globale, 99 %, est **supérieure** à celle de chaque pompe (90 %) : c'est tout l'intérêt de la redondance.

Comparaison avec le montage en série. Deux composants à 90 % donnent :

— en **série** (il faut les deux) : $0,9 \times 0,9 = 0,81$;

— en **parallèle** (il en suffit un) : $1 - 0,1^2 = 0,99$.

Avec trois pompes : $1 - 0,1^3 = 0,999$. Chaque pompe ajoutée divise le risque de panne totale par dix.

Réponse. $P = 1 - 0,01 = 0,99$.

Correction de l'exercice 11 – Le code à composer

a) Il y a $10^3 = 1000$ codes possibles, tous équiprobables :

$$P = \frac{1}{1000} = 0,001$$

b) **Par l'événement contraire** : échouer 5 fois de suite. Chaque échec a une probabilité de 0,999, et les essais sont indépendants :

$$P(5 \text{ échecs}) = 0,999^5 \approx 0,99501$$

— Donc :

$$P(\text{au plus 5 essais}) = 1 - 0,999^5 \approx 0,00499$$

Ordre de grandeur. Environ 0,5 % : essayer cinq fois multiplie presque exactement par cinq la chance initiale, car celle-ci est très petite.

Combien d'essais pour une chance sur deux ? Il faudrait n tel que $0,999^n \leq 0,5$, soit environ 693 essais — près de sept cents tentatives pour une chance sur deux.

L'hypothèse du modèle. Une vraie personne **mémorise** ses essais : elle n'aurait besoin que de 500 essais en moyenne. L'indépendance n'est pas toujours réaliste.

Réponse. a) 0,001 — b) $1 - 0,999^5 \approx 0,005$.

Correction de l'exercice 12 – Indépendance et tableau à compléter

On combine les deux formules.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

— En remplaçant l'intersection :

$$0,7 = 0,4 + P(B) - 0,4P(B)$$

— **On regroupe** : $0,7 - 0,4 = P(B)(1 - 0,4)$, soit

$$0,3 = 0,6P(B)$$

— D'où :

$$P(B) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

— **Vérification** : $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$, et $0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$ ✓

La technique. Une hypothèse d'indépendance remplace une inconnue ($P(A \cap B)$) par un produit : on se ramène alors à une **équation du premier degré** en $P(B)$.

Formule générale, obtenue de la même façon :

$$P(A \cup B) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

— **Contrôle** : $1 - 0,6 \times 0,5 = 0,7$ ✓

Réponse. $P(B) = 0,5$.

Correction de l'exercice 13 - Un contre-exemple

Il y a 36 issues équiprobables.

a) $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$, et l'intersection correspond au seul couple (6 ; 6) :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

— Les deux événements sont **indépendants** : deux dés distincts ne s'influencent pas.

— b) La somme vaut 7 pour 6 couples : (1 ; 6), (2 ; 5), ..., (6 ; 1), donc $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

— $A \cap C$ correspond au seul couple (6 ; 1) :

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

— L'égalité est vérifiée : A et C sont **indépendants** eux aussi.

Le résultat surprenant. Savoir que le premier dé donne 6 ne change **pas** la probabilité que la somme vaille 7 : elle reste $\frac{1}{6}$, car il reste toujours exactement une valeur du second dé qui convient.

La morale. L'indépendance est une propriété **numérique**, pas intuitive : ici deux événements manifestement liés par les mêmes dés sont pourtant indépendants.

Réponse. a) oui — b) oui, bien que la somme dépende du premier dé.

Correction de l'exercice 14 - Le taux de réponse

a) **Aucune réponse** : les 6 personnes ne répondent pas, chacune avec une probabilité de 0,65.

$$P = 0,65^6 \approx 0,0754$$

b) **Au moins une réponse**, par le contraire :

$$P = 1 - 0,65^6 \approx 0,9246$$

c) On cherche le plus petit entier n tel que

$$1 - 0,65^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,65^n < 0,01$$

- On teste à la calculatrice : $0,65^{10} \approx 0,0135$, encore trop grand ;
 $0,65^{11} \approx 0,00875 < 0,01$ ✓
- Il faut donc envoyer 11 **questionnaires**.

Méthode pour le seuil. On tabule les puissances successives jusqu'au dépassement ; un programme Python avec une boucle « tant que » fait la même chose en trois lignes.

Interprétation. Avec un taux de réponse d'un tiers, onze envois suffisent à être presque certain d'obtenir au moins un retour.

Réponse. a) $\approx 0,0754$ — b) $\approx 0,9246$ — c) $n = 11$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : dépendance ou indépendance ?

On note V « posséder une voiture » et B « posséder un vélo ».

a) **Test** :

$$P(V) \times P(B) = 0,55 \times 0,30 = 0,165$$

- Or $P(V \cap B) = 0,18 \neq 0,165$: les deux événements ne sont **pas indépendants**.
- Comme $0,18 > 0,165$, posséder une voiture **augmente** légèrement la probabilité d'avoir aussi un vélo.
- b) **Union** :

$$P(V \cup B) = 0,55 + 0,30 - 0,18 = 0,67$$

- Deux habitants sur trois possèdent au moins l'un des deux ; 33 % n'ont ni l'un ni l'autre.
- c) **Conditionnelle** :

$$P_V(B) = \frac{0,18}{0,55} \approx 0,327$$

- À comparer à $P(B) = 0,30$: la probabilité passe de 30 % à 32,7 %, un écart faible mais réel.

Conclusion nuancée. La dépendance existe, mais elle est **ténue** : sur un échantillon plus petit, cet écart pourrait n'être dû qu'au hasard de l'échantillonnage.

Réponse. a) non ($0,18 \neq 0,165$) — b) 0,67 — c) $\approx 0,327$.