Plaquette 1 – Probabilité conditionnelle

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour un événement A de probabilité non nulle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On lit « probabilité de B sachant A ». L'univers est **réduit** à A.

Formule des probabilités composées, la même, réécrite :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

C'est elle qu'on utilise sur un arbre : on **multiplie** le long d'une branche.

Dans un tableau croisé. Si les effectifs sont donnés :

$$P_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$$

on divise donc par le **total de la ligne (ou de la colonne)** correspondant à A, et non par l'effectif total.

Attention à l'ordre. $P_A(B)$ et $P_B(A)$ n'ont aucune raison d'être égales : « la probabilité d'être malade sachant que le test est positif » n'est pas « la probabilité que le test soit positif sachant qu'on est malade ».

Événement contraire. Pour tout événement A de probabilité non nulle :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$$

Vocabulaire des énoncés. « parmi les… », « chez les… », « sachant que… », « si… » annoncent presque toujours une probabilité **conditionnelle**.

Correction de l'exercice 1 – Lire un tableau croisé

a) **Probabilité simple** : on divise par l'effectif **total**.

$$P(F) = \frac{210}{400} = 0{,}525 \qquad P(F \cap S) = \frac{120}{400} = 0{,}3$$

— $P(F \cap S)$ est la probabilité d'être **à la fois** une fille et sportive.

— b) **Probabilité conditionnelle** : on divise par l'effectif de F.

$$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{0{,}3}{0{,}525} \approx 0{,}571$$

— **Lecture directe dans le tableau** : $\frac{120}{210} \approx 0{,}571$ ✓ — même résultat, sans passer par les probabilités.

Interprétation. Environ 57,1 % des **filles** pratiquent un sport en club. C'est une proportion **parmi les filles**, alors que $P(F \cap S) = 30$ % est une proportion **parmi tous les élèves**.

À comparer : $P_G(S) = \frac{130}{190} \approx 0{,}684$. Les garçons sont proportionnellement plus nombreux à pratiquer un sport.

Réponse. a) $P(F) = 0{,}525$ et $P(F \cap S) = 0{,}3$ — b) $P_F(S) \approx 0{,}571$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Inverser le conditionnement

Calcul. On restreint l'univers aux élèves **sportifs**, au nombre de 250 :

$$P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{120}{250} = 0{,}48$$

Pourquoi c'est différent. Les deux quotients ont le **même numérateur** (120 élèves filles et sportives) mais des **dénominateurs différents** :

$$P_F(S) = \frac{120}{210} \approx 0{,}571 \qquad P_S(F) = \frac{120}{250} = 0{,}48$$

— $P_F(S)$ répond à : « parmi les filles, quelle proportion fait du sport ? »
— $P_S(F)$ répond à : « parmi les sportifs, quelle proportion est constituée de filles ? »

La relation entre les deux. En écrivant $P(F \cap S)$ de deux façons :

$$P(F) \times P_F(S) = P(S) \times P_S(F)$$

— **Contrôle** : $0{,}525 \times 0{,}571 \approx 0{,}3$ et $0{,}625 \times 0{,}48 = 0{,}3$ ✓

L'erreur à ne jamais commettre. Confondre ces deux probabilités s'appelle l'« erreur du procureur » : elle fait condamner des innocents dans les affaires de tests ADN.

Réponse. $P_S(F) = 0{,}48$, à comparer à $P_F(S) \approx 0{,}571$: les univers de référence diffèrent.

Correction de l'exercice 3 – Appliquer la définition

— **Première conditionnelle** :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

— **Seconde conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

— **Union**, par la formule générale :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}6$$

Contrôles de cohérence.

— Une probabilité conditionnelle est comprise entre 0 et 1 ✓
— $P(A \cap B) \leq \min(P(A) ; P(B))$: ici $0{,}3 \leq 0{,}4$ ✓
— $P(A \cup B) \leq 1$ ✓

Pourquoi retrancher l'intersection ? Dans $P(A) + P(B)$, les issues communes à A et B sont comptées **deux fois** : on les retire une fois.

Réponse. $P_A(B) = 0{,}75$, $P_B(A) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}6$.

Correction de l'exercice 4 – Des probabilités composées

a) On utilise la formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$$

b) Dans l'univers réduit à A, les événements B et $\overline{B}$ sont contraires :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

— D'où :

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) \times P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}15 + 0{,}45 = 0{,}6 = P(A)$ ✓ — l'événement A se partage bien entre les deux cas.

Le piège à éviter. $P\left(\overline{A \cap B}\right)$ vaut $1 - 0{,}15 = 0{,}85$, ce qui n'est **pas** $P\left(A \cap \overline{B}\right)$: passer au contraire ne se fait que sur un seul événement à la fois.

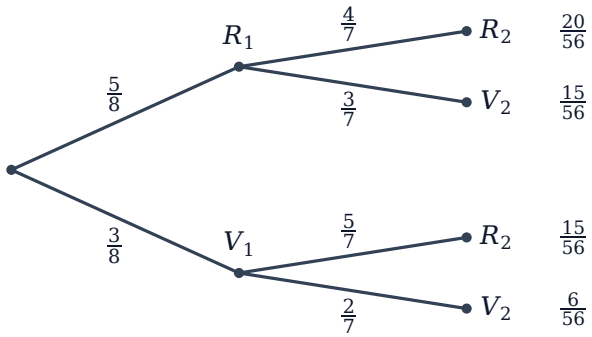
Réponse. a) 0,15 — b) $P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}75$ et $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}45$.

Correction de l'exercice 5 – Construire un arbre

— a) Au **premier tirage**, il y a 8 boules : $P(R_1) = \frac{5}{8}$ et $P(V_1) = \frac{3}{8}$.

— Au **second tirage**, il ne reste que 7 boules, et leur composition dépend du premier tirage : après une rouge, il reste 4 rouges et 3 vertes ; après une verte, 5 rouges et 2 vertes.

— Les probabilités du second niveau sont donc **conditionnelles** : $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$, $P_{V_1}(R_2) = \frac{5}{7}$.



Deux tirages sans remise dans l'urne (5 R, 3 V)

— **Contrôle** : les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1 ($\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$, $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1$) ✓, et les probabilités des quatre chemins aussi : $\frac{20 + 15 + 15 + 6}{56} = 1$ ✓

— b) On **multiplie le long de la branche** :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$$

Ce que le « sans remise » change. Les probabilités du second tirage **dépendent** du premier : ce sont de vraies probabilités conditionnelles. Avec remise, elles resteraient toutes égales à $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{8}$.

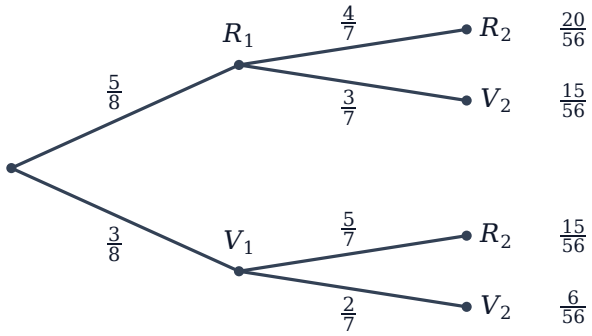
Réponse. b) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$.

Correction de l'exercice 6 – Le tirage mixte

On reprend l'arbre pondéré des deux tirages. L'événement « une de chaque couleur » se réalise de **deux façons** : rouge puis verte, ou verte puis rouge. Ces deux chemins sont incompatibles : on **additionne** leurs probabilités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P = P(R_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap R_2)$$



Les deux chemins « une boule de chaque couleur »

— **Premier chemin** : $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$.

— **Second chemin** : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$.

— **Somme** :

$$P = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$$

Contrôle par le complémentaire. Les trois cas possibles sont : deux rouges $\left(\frac{20}{56}\right)$, deux vertes $\left(\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}\right)$, ou une de chaque $\left(\frac{30}{56}\right)$.

$$\frac{20 + 6 + 30}{56} = \frac{56}{56} = 1$$

La somme des trois cas vaut bien 1 ✓

La règle de l’arbre. On **multiplie** le long d’un chemin, on **additionne** entre les chemins qui réalisent l’événement.

Réponse. $P = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$.

Correction de l’exercice 7 – Le test médical

On repère les mots « chez les malades » et « chez les personnes saines » : ils annoncent des probabilités **conditionnelles**.

— « la maladie touche 2 % de la population » : c’est une probabilité **simple**.

$$P(M) = 0{,}02 \qquad P\left(\overline{M}\right) = 0{,}98$$

— « le test est positif chez 95 % des malades » : univers réduit aux malades.

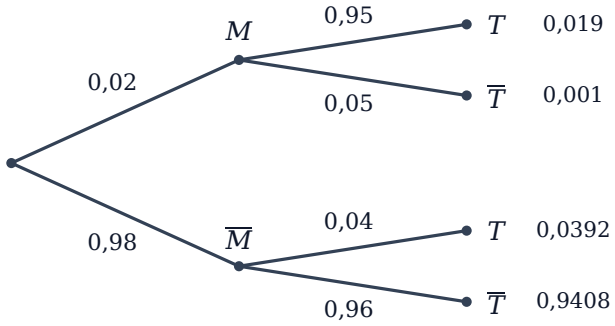
$$P_M(T) = 0{,}95$$

— « positif chez 4 % des personnes saines » :

$$P_{\overline{M}}(T) = 0{,}04$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— On représente ces données par un **arbre pondéré** : la maladie au premier niveau, le résultat du test au second (sachant l'état de santé).



Arbre du test de dépistage

— On en déduit, en multipliant le long des branches, les probabilités composées :

$$P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019 \qquad P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}98 \times 0{,}04 = 0{,}0392$$

Vocabulaire des tests. $P_M(T)$ est la **sensibilité** du test, $P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0{,}96$ sa **spécificité**.

Ce que l'on remarque déjà. Il y a **plus** de faux positifs (0,0392) que de vrais positifs (0,019) : c'est l'effet d'une maladie rare testée sur une grande population.

Réponse. $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$, $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}04$.

Correction de l'exercice 8 – Une probabilité inconnue

On retourne la formule de l'union :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

— **Isolement** : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

$$P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}45 - 0{,}6 = 0{,}15$$

— **Probabilité conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

— **Contrôles** : $P(A \cap B) = 0{,}15 \leq P(A) = 0{,}3$ ✓ et $P(A \cup B) = 0{,}6 \geq P(B) = 0{,}45$ ✓

Un tiers des éléments de B appartiennent aussi à A.

Piège de lecture. $P(A \cup B) = 0{,}6$ n'est pas la somme $0{,}3 + 0{,}45 = 0{,}75$: la différence, 0,15, est exactement l'intersection comptée en double.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}15$ et $P_B(A) = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Des effectifs à reconstituer

— a) **Effectifs par catégorie** : 60 % de 250 font 150 adultes, donc 100 jeunes.
— **Compétiteurs** : 40 % de 150 = 60 adultes, et 70 % de 100 = 70 jeunes.

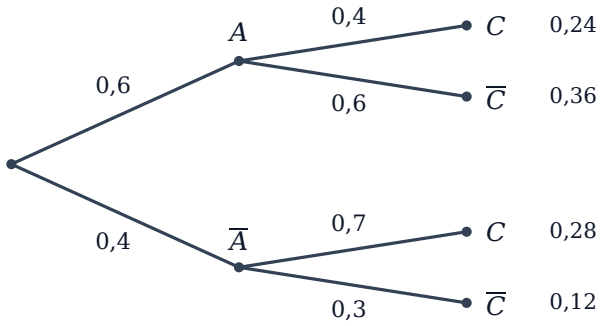
·	Compétition	Pas de compétition	Total
Adultes	60	90	150
Jeunes	70	30	100
Total	130	120	250

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On restreint l'univers aux 130 compétiteurs :

$$P_C(J) = \frac{70}{130} = \frac{7}{13} \approx 0{,}538$$

Même calcul sur un arbre pondéré (A : adulte, $\overline{A}$: jeune, C : compétition). Les feuilles 0,24 et 0,28 correspondent aux effectifs 60 et 70 (sur 250), et $P_C\left(\overline{A}\right) = \dfrac{0{,}28}{0{,}24 + 0{,}28} = \dfrac{7}{13}$ ✓



Même situation en arbre : A adulte, C compétition

Interprétation. Bien que les jeunes soient **minoritaires** dans le club (40 %), ils sont **majoritaires** parmi les compétiteurs (53,8 %) : leur taux de participation plus élevé compense leur plus faible effectif.

— **Contrôle** : $\dfrac{130}{250} = 0{,}52$ des membres participent, ce qui est bien compris entre 40 % et 70 % ✓

Réponse. b) $P_C(J) = \dfrac{7}{13} \approx 0{,}538$.

Correction de l'exercice 10 – Deux dés

Il y a 36 issues équiprobables.

a) La somme vaut 8 pour les couples $(2\,;6)$, $(3\,;5)$, $(4\,;4)$, $(5\,;3)$, $(6\,;2)$: **cinq** issues.

$$P(S = 8) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$$

— b) **L'univers se réduit** aux sommes paires. La somme est paire lorsque les deux dés ont la même parité :

— deux pairs : $3 \times 3 = 9$ issues ; deux impairs : $3 \times 3 = 9$ issues, soit 18 issues.

$$P(\text{somme paire}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

— **Probabilité conditionnelle** :

$$P_{\text{paire}}(S = 8) = \frac{P(S = 8 \cap \text{paire})}{P(\text{paire})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278$$

— **Lecture directe** : parmi les 18 issues de somme paire, 5 donnent 8 ✓

Ce que l'information apporte. Savoir que la somme est paire **double** presque la probabilité d'obtenir 8 : l'information a réduit l'univers de moitié en conservant toutes les issues favorables.

Réponse. a) $\dfrac{5}{36}$ — b) $\dfrac{5}{18}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Le jeu de cartes

Le jeu comporte 32 cartes : 4 couleurs de 8 cartes, dont 3 figures par couleur.

a) Il y a 4 rois :

$$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

b) Il y a $3 \times 4 = 12$ figures, dont 4 rois. L’univers se réduit aux figures :

$$P_F(R) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

c) Il y a 8 cœurs, dont **un** roi :

$$P_C(R) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Une observation importante. En c), la probabilité conditionnelle est **égale** à la probabilité initiale : savoir que la carte est un cœur n’apporte **aucune information** sur le fait qu’elle soit un roi. On dit que les événements « être un roi » et « être un cœur » sont **indépendants**.

En b), au contraire, l’information change tout : la probabilité passe de 0,125 à 0,333.

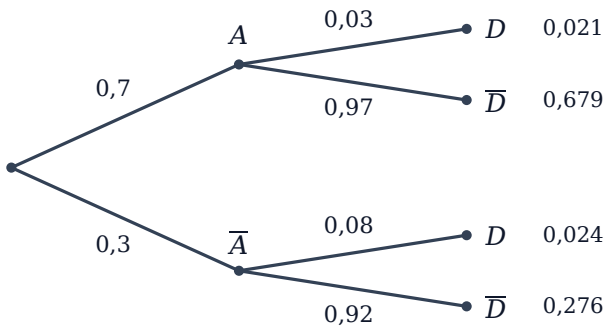
Réponse. a) $\frac{1}{8}$ — b) $\frac{1}{3}$ — c) $\frac{1}{8}$.

Correction de l’exercice 12 – La chaîne de production

a) On note A « la pièce vient de la machine A » et D « la pièce est défectueuse ».

$$P(A) = 0{,}7 \qquad P(B) = 0{,}3 \qquad P_A(D) = 0{,}03 \qquad P_B(D) = 0{,}08$$

— Les pourcentages de défauts sont donnés **par machine** : ce sont des conditionnelles. On note $\overline{A} = B$ et l’on construit l’arbre pondéré.



Machine (A ou B) puis état de la pièce

b) **Probabilités composées** :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}7 \times 0{,}03 = 0{,}021$$

— C’est la feuille du chemin $A \to D$ de l’arbre.

— De même, $P(B \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}08 = 0{,}024$.

Un résultat contre-intuitif. La machine B produit **moins** de pièces, mais fournit **davantage** de pièces défectueuses (2,4 % de la production totale contre 2,1 %) : son taux de défaut, plus de deux fois supérieur, l’emporte sur son volume plus faible.

— **Contrôle** : la proportion totale de pièces défectueuses vaut 0,021 + 0,024 = 0,045, soit 4,5 %, bien comprise entre 3 % et 8 % ✓

Réponse. a) $P(A) = 0{,}7$, $P_A(D) = 0{,}03$, $P_B(D) = 0{,}08$ — b) $P(A \cap D) = 0{,}021$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Remonter à la probabilité simple

On retourne la définition. De

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

on tire :

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{0{,}24}{0{,}8} = 0{,}3$$

— **Second calcul** : dans l'univers réduit à A, $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, donc

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$$

— **Contrôle** : $0{,}24 + 0{,}06 = 0{,}3 = P(A)$ ✓

La formule à trois termes. $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$ sont liés par une seule relation : **deux** d'entre eux suffisent toujours à trouver le troisième.

Vérification de vraisemblance. Une probabilité doit rester dans $[0\,;1]$: si le calcul avait donné $P(A) > 1$, c'est que $P(A \cap B)$ dépassait $P_A(B)$, ce qui est impossible.

Réponse. $P(A) = 0{,}3$ et $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}06$.

Correction de l'exercice 14 – L'enquête de satisfaction

Tableau des effectifs.

·	Satisfaits	Non satisfaits	Total
Abonnés	360	120	480
À l'unité	192	128	320
Total	552	248	800

a) **Probabilité simple** :

$$P(S) = \frac{552}{800} = 0{,}69$$

b) On restreint aux 552 clients satisfaits :

$$P_S(A) = \frac{360}{552} \approx 0{,}652 \qquad P_S\left(\overline{A}\right) = \frac{192}{552} \approx 0{,}348$$

— Un client satisfait est donc **plus probablement abonné** (environ 65 % contre 35 %).

Deux lectures à ne pas confondre.

— $P_A(S) = \frac{360}{480} = 0{,}75$: trois abonnés sur quatre sont satisfaits ;

— $P_S(A) \approx 0{,}652$: deux clients satisfaits sur trois sont abonnés.

Les deux sont vraies, et différentes.

Réponse. a) $P(S) = 0{,}69$ — b) abonné, avec $P_S(A) \approx 0{,}652$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la tombola

On note G « billet gagnant » et L « gros lot ».

a) $P(G) = \frac{60}{200} = 0{,}3$.

b) Les 15 gros lots sont tous parmi les gagnants :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(L) = \frac{15}{200} = 0{,}075$$

c) On restreint l'univers aux 60 gagnants :

$$P_G(L) = \frac{15}{60} = 0{,}25$$

— **Contrôle par la formule** : $P_G(L) = \dfrac{P(G \cap L)}{P(G)} = \dfrac{0{,}075}{0{,}3} = 0{,}25$ ✓

— d) Tout billet donnant le gros lot est **forcément** gagnant : l'événement L est **inclus** dans G, donc $L \cap G = L$ et

$$P_L(G) = \frac{P(L)}{P(L)} = 1$$

Ce que montre la question d). Quand un événement est inclus dans un autre, la probabilité conditionnelle vaut 1 : c'est le cas où l'information est **certaine**, et cela se voit sans calcul.

Réponse. a) 0,3 — b) 0,075 — c) 0,25 — d) 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).