

Plaquette 2 – Formule des probabilités totales

Probabilités conditionnelles – Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Partition de l'univers. Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ de probabilités non nulles forment une partition s'ils sont **deux à deux incompatibles** et si leur réunion est l'univers entier. Le cas le plus fréquent est la partition $\langle A; \bar{A} \rangle$.

Formule des probabilités totales, avec la partition $\langle A; \bar{A} \rangle$:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

et, avec une partition en trois cas :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

Sur l'arbre, la règle est visuelle :

- on **multiplie** les probabilités le long d'un chemin ;
- on **additionne** les chemins qui mènent à l'événement cherché ;
- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Remonter l'arbre. Pour calculer $P_B(A)$ alors que l'énoncé donne $P_A(B)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

où le dénominateur $P(B)$ se calcule **d'abord** par les probabilités totales. C'est la démarche attendue au bac.

Correction de l'exercice 1 – Deux fournisseurs

Données. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P_A(D) = 0,02$ et $P_B(D) = 0,05$.

Les événements A et B forment une partition de l'univers : chaque ampoule vient de l'un ou de l'autre, jamais des deux. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D)$$

— **Substitution** :

$$P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,02 = 0,032$$

Il y a donc 3,2 % d'ampoules défectueuses dans le magasin.

Contrôle de vraisemblance. Le résultat doit être compris entre les deux taux, 2 % et 5 % ✓ C'est une **moyenne pondérée** par les parts de marché : plus proche de 2 % car A fournit la majorité.

L'erreur classique. Faire la moyenne simple $\frac{2+5}{2} = 3,5$ % : elle ignore le poids de chaque fournisseur.

Réponse. $P(D) = 0,032$, soit 3,2 %.

Correction de l'exercice 2 – Remonter à la source

On cherche $P_D(B)$, alors que l'énoncé donne $P_B(D)$: il faut **remonter l'arbre**.

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$

- **Numérateur** : $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$.
- **Dénominateur** : calculé à l'exercice précédent, $P(D) = 0,032$.
- **Quotient** :

$$P_D(B) = \frac{0,02}{0,032} = 0,625$$

Interprétation. Le fournisseur B ne livre que 40 % des ampoules, mais il est responsable de 62,5 % des ampoules défectueuses.

- **Contrôle** : $P_D(A) = \frac{0,012}{0,032} = 0,375$, et $0,625 + 0,375 = 1$ ✓

La démarche à retenir. Numérateur par la formule des probabilités composées, dénominateur par les probabilités totales : c'est l'exercice type du chapitre.

Réponse. $P_D(B) = 0,625$.

Correction de l'exercice 3 - Une partition en trois cas

Les trois ateliers forment une partition : on additionne les trois chemins.

$$P(R) = P(A_1)P_{A_1}(R) + P(A_2)P_{A_2}(R) + P(A_3)P_{A_3}(R)$$

- **Part du troisième atelier** : $1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$.
- **Substitution** :

$$P(R) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,06$$

- **Calcul** : $0,005 + 0,012 + 0,012 = 0,029$.

Le taux de rebut global est de 2,9 %.

Ce que révèle le détail. Les ateliers 2 et 3 contribuent **chacun** autant que l'autre (1,2 %) alors que l'atelier 2 produit une fois et demie plus de pièces : c'est le taux de rebut de l'atelier 3 qui pèse.

- **Contrôle** : le résultat est compris entre 1 % et 6 % ✓ et la somme des parts vaut $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$ ✓

Réponse. $P(R) = 0,029$, soit 2,9 %.

Correction de l'exercice 4 - Le test médical, suite

- a) **Probabilités totales** avec la partition $\{M; \overline{M}\}$:

$$P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)$$

- **Substitution** : $P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582$.
- Environ 5,8 % des tests sont positifs.
- b) On remonte l'arbre :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,326$$

Le résultat qui surprend. Un test positif ne signifie la maladie que dans **environ un tiers des cas**, alors que le test détecte 95 % des malades.

Pourquoi ? La maladie est **rare** : les 98 % de personnes saines, même avec seulement 4 % de faux positifs, produisent deux fois plus de tests positifs que les vrais malades.

Conséquence pratique. C'est la raison pour laquelle un test de dépistage positif est

toujours suivi d'un **second test**, plus spécifique.

Réponse. a) $P(T) = 0,0582$ — b) $P_T(M) \approx 0,326$.

Correction de l'exercice 5 – Compléter un arbre

a) On calcule les quatre produits :

Chemin	Calcul	Probabilité
A puis B	$0,35 \times 0,8$	0,28
A puis $\bar{B}$	$0,35 \times 0,2$	0,07
$\bar{A}$ puis B	$0,65 \times 0,5$	0,325
$\bar{A}$ puis $\bar{B}$	$0,65 \times 0,5$	0,325

— **Contrôle** : la somme des quatre vaut $0,28 + 0,07 + 0,325 + 0,325 = 1$ ✓ C'est toujours le cas : les quatre chemins couvrent toutes les possibilités.

— b) **Probabilités totales** : on additionne les chemins menant à B.

$$P(B) = 0,28 + 0,325 = 0,605$$

— Et par événement contraire :

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,605 = 0,395$$

— **Contrôle** : c'est aussi $0,07 + 0,325 = 0,395$ ✓

Le réflexe de vérification. La somme de **tous** les chemins vaut 1 ; la somme des branches issues d'un même nœud vaut 1. Deux contrôles gratuits à chaque exercice.

Réponse. b) $P(B) = 0,605$ et $P(\bar{B}) = 0,395$.

Correction de l'exercice 6 – Le trajet quotidien

On note V « venir à vélo » et R « être en retard ».

a) **Probabilités totales** :

$$P(R) = P(V)P_V(R) + P(\bar{V})P_{\bar{V}}(R)$$

— $P(R) = 0,7 \times 0,05 + 0,3 \times 0,12 = 0,035 + 0,036 = 0,071$.

— Léo est en retard environ 7,1 % du temps, soit à peu près **un jour sur quatorze**.

— b) On remonte l'arbre :

$$P_R(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap R)}{P(R)} = \frac{0,036}{0,071} \approx 0,507$$

Interprétation. Le bus n'est utilisé que 30 % du temps, mais il est responsable de **plus de la moitié** des retards.

— **Contrôle** : $P_R(V) = \frac{0,035}{0,071} \approx 0,493$, et la somme vaut 1 ✓

Un conseil chiffré. S'il prenait toujours le vélo, son taux de retard tomberait à 5 % : soit environ deux jours de retard de moins par trimestre.

Réponse. a) $P(R) = 0,071$ — b) environ 0,507.

Correction de l'exercice 7 – L'urne à deux étages

Le choix de l'urne forme une partition :

$$P(U_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(U_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Les tirages dans chaque urne :

$$P_{U_1}(B) = \frac{4}{10} = 0,4 \quad P_{U_2}(B) = \frac{7}{10} = 0,7$$

Probabilités totales :

$$P(B) = \frac{1}{3} \times 0,4 + \frac{2}{3} \times 0,7 = \frac{0,4}{3} + \frac{1,4}{3} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

La probabilité de tirer une boule blanche est de 0,6.

Contrôle de vraisemblance. Le résultat est compris entre 0,4 et 0,7, plus proche de 0,7 car U_2 est choisie deux fois plus souvent ✓

Remarque. Si l'on mélangeait les deux urnes dans un seul récipient (11 blanches sur 20), la probabilité serait 0,55 : le dé, en favorisant U_2 , change le résultat.

Réponse. $P(B) = 0,6$.

Correction de l'exercice 8 - De quelle urne vient-elle ?

On applique la formule du conditionnement inverse :

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)}$$

— **Numérateur** : $P(U_1 \cap B) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{0,4}{3} \approx 0,1333$.

— **Dénominateur** : $P(B) = 0,6$.

— **Quotient** :

$$P_B(U_1) = \frac{0,1333}{0,6} \approx 0,222$$

— Autrement dit, $\frac{2}{9}$ exactement.

Vérification par les fractions.

$$P_B(U_1) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{2}{9} \approx 0,222$$

— **Contrôle** : $P_B(U_2) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{10}}{0,6} = \frac{0,4667}{0,6} \approx 0,778$, et $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1$ ✓

Lecture. L'urne U_1 est choisie une fois sur trois, mais elle n'explique que deux tirages blancs sur neuf : elle contient moins de blanches.

Réponse. $P_B(U_1) = \frac{2}{9} \approx 0,222$.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver une probabilité conditionnelle

On écrit la formule des probabilités totales et on isole l'inconnue.

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

— **Substitution** : $0,5 = 0,4 \times 0,65 + 0,6 \times P_{\bar{A}}(B)$.

— **Calcul** : $0,5 = 0,26 + 0,6 P_{\bar{A}}(B)$, donc $0,6 P_{\bar{A}}(B) = 0,24$.

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,24}{0,6} = 0,4$$

— **Vérification** : $0,4 \times 0,65 + 0,6 \times 0,4 = 0,26 + 0,24 = 0,5 \checkmark$

Interprétation. L'événement B est **plus fréquent** quand A est réalisé (65 % contre 40 %) : les deux événements ne sont donc pas indépendants.

Méthode générale. La formule des probabilités totales contient cinq quantités liées ; connaître quatre d'entre elles permet toujours de trouver la cinquième, en résolvant une équation du premier degré.

Réponse. $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$.

Correction de l'exercice 10 – Le questionnaire à choix multiples

On note C « connaître la réponse » et J « répondre juste ».

— **Données** : $P(C) = 0,7$, $P_C(J) = 1$ et $P_{\bar{C}}(J) = \frac{1}{4} = 0,25$.

— a) **Probabilités totales** :

$$P(J) = 0,7 \times 1 + 0,3 \times 0,25 = 0,7 + 0,075 = 0,775$$

— L'élève répond juste dans 77,5 % des cas.

— b) **Conditionnement inverse** :

$$P_J(C) = \frac{P(C \cap J)}{P(J)} = \frac{0,7}{0,775} \approx 0,903$$

Interprétation. Une bonne réponse vient d'une vraie connaissance dans environ 90 % des cas : le hasard ne « fabrique » que 7,5 points sur 77,5.

Et si le QCM avait 2 choix ? On aurait $P(J) = 0,7 + 0,15 = 0,85$ et $P_J(C) \approx 0,824$: moins de propositions, plus de réussite par chance, donc une bonne réponse moins informative.

Réponse. a) $P(J) = 0,775$ — b) $P_J(C) \approx 0,903$.

Correction de l'exercice 11 – Trois lignes de production

— **Part de la ligne 3** : $1 - 0,4 - 0,35 = 0,25$.

— **Probabilité totale de défaut** :

$$P(D) = 0,4 \times 0,02 + 0,35 \times 0,03 + 0,25 \times 0,07$$

— **Calcul** : $0,008 + 0,0105 + 0,0175 = 0,036$.

— **Conditionnement inverse**, ligne par ligne :

Ligne	$P(L_i \cap D)$	$P_D(L_i)$
1	0,008	$\frac{0,008}{0,036} \approx 0,222$
2	0,0105	$\approx 0,292$
3	0,0175	$\approx 0,486$

— **Contrôle** : $0,222 + 0,292 + 0,486 = 1 \checkmark$

Conclusion. Une pièce défectueuse provient le plus probablement de la **ligne 3**, avec près d'une chance sur deux — alors que cette ligne ne produit qu'un quart des pièces.

Décision industrielle. C'est sur la ligne 3 qu'il faut intervenir : y ramener le taux de défaut à 3 % ferait passer le taux global de 3,6 % à 2,6 %.

Réponse. De la ligne 3, avec $P_D(L_3) \approx 0,486$.

Correction de l'exercice 12 - Deux tirages successifs

Premier tirage : $P(R_1) = \frac{3}{8}$ et $P(B_1) = \frac{5}{8}$.

Second tirage : l'urne contient maintenant 9 boules, dont la composition dépend du premier tirage.

- Si la première était rouge : 4 rouges sur 9, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{9}$.
- Si la première était bleue : 3 rouges sur 9, donc $P_{B_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Probabilités totales :

$$P(R_2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{72} + \frac{15}{72} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

Un résultat remarquable. $P(R_2) = P(R_1) = \frac{3}{8}$: malgré le renforcement, la probabilité de tirer rouge au second tirage est **la même** qu'au premier.

Pourquoi ? Le renforcement favorise autant le rouge quand il sort que le bleu quand il sort : en moyenne, les deux effets se compensent exactement. C'est une propriété du modèle d'urne de Pólya.

Réponse. $P(R_2) = \frac{3}{8}$, comme au premier tirage.

Correction de l'exercice 13 - L'assurance automobile

a) **Probabilités totales** :

$$P(S) = 0,2 \times 0,18 + 0,5 \times 0,06 + 0,3 \times 0,09$$

- **Calcul** : $0,036 + 0,03 + 0,027 = 0,093$.
- Environ 9,3 % des clients déclarent un sinistre dans l'année.
- b) **Conditionnement inverse** :

$$P_S(J) = \frac{0,036}{0,093} \approx 0,387$$

Interprétation. Les jeunes conducteurs représentent 20 % des clients mais près de 39 % des sinistres déclarés : c'est la justification chiffrée des surprimes appliquées à ce profil.

- **Contrôle** : $P_S(E) = \frac{0,03}{0,093} \approx 0,323$ et $P_S(\text{senior}) = \frac{0,027}{0,093} \approx 0,290$; la somme des trois vaut 1 ✓

Nuance à garder en tête. Ce calcul décrit une **corrélation**, pas une responsabilité individuelle : il porte sur un profil moyen, pas sur un conducteur donné.

Réponse. a) $P(S) = 0,093$ — b) environ 38,7 %.

Correction de l'exercice 14 - Un arbre à compléter par le bas

Étape 1 — l'intersection, qui sert de pivot :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Étape 2 — la première conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,25} = 0,48$$

Étape 3 — la seconde, par les probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

— $0,4 = 0,12 + 0,75 \times P_{\bar{A}}(B)$, donc $0,75 P_{\bar{A}}(B) = 0,28$ et

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,28}{0,75} \approx 0,373$$

— **Vérification** : $0,25 \times 0,48 + 0,75 \times 0,373 \approx 0,12 + 0,28 = 0,4$ ✓

La clé de ce type d'exercice. L'intersection $P(A \cap B)$ est le **point de passage** entre les deux conditionnements : on la calcule d'abord, tout le reste en découle.

Réponse. $P_A(B) = 0,48$ et $P_{\bar{A}}(B) \approx 0,373$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le contrôle qualité

On note D « défectueux » et J « rejeté ».

— **Données** : $P(D) = 0,04$, $P_D(J) = 0,92$ et $P_{\bar{D}}(J) = 0,03$.

— a) **Probabilités totales** :

$$P(J) = 0,04 \times 0,92 + 0,96 \times 0,03 = 0,0368 + 0,0288 = 0,0656$$

b) **Conditionnement inverse** :

$$P_J(D) = \frac{0,0368}{0,0656} \approx 0,561$$

— Un peu plus de la moitié des rejets sont justifiés.

— c) **Composants acceptés** : $P(\bar{J}) = 1 - 0,0656 = 0,9344$, et

$$P(D \cap \bar{J}) = 0,04 \times 0,08 = 0,0032$$

$$P_{\bar{J}}(D) = \frac{0,0032}{0,9344} \approx 0,0034$$

Lecture industrielle. Le contrôle divise le taux de défauts livrés par plus de dix : de 4 % à 0,34 %. En contrepartie, il jette 2,88 % de pièces correctes — c'est le coût du filtrage.

— **Contrôle** : $0,0368 + 0,0032 = 0,04 = P(D)$ ✓

Réponse. a) 0,0656 — b) environ 0,561 — c) environ 0,0034.