Plaquette 2 – Formule des probabilités totales

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Partition de l'univers. Des événements A_1, A_2, …, A_n de probabilités non nulles forment une partition s'ils sont **deux à deux incompatibles** et si leur réunion est l'univers entier. Le cas le plus fréquent est la partition $\left\langle A\,;\overline{A}\right\rangle$.

Formule des probabilités totales, avec la partition $\left\langle A\,;\overline{A}\right\rangle$:

$$P(B) = P(A\cap B) + P\left(\overline{A}\cap B\right) = P(A)P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}(B)$$

et, avec une partition en trois cas :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

Sur l'arbre, la règle est visuelle :

— on **multiplie** les probabilités le long d'un chemin ;
— on **additionne** les chemins qui mènent à l'événement cherché ;
— la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Remonter l'arbre. Pour calculer $P_B(A)$ alors que l'énoncé donne $P_A(B)$:

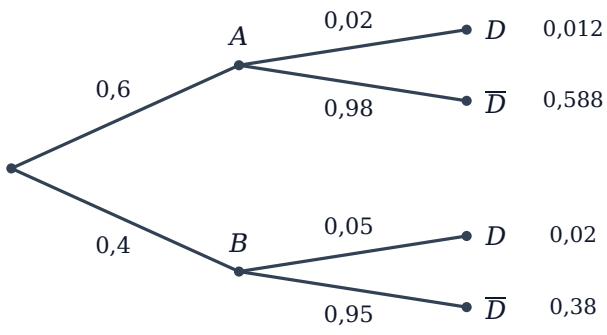
$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

où le dénominateur $P(B)$ se calcule **d'abord** par les probabilités totales. C'est la démarche attendue au bac.

Correction de l'exercice 1 – Deux fournisseurs

Données. $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P_A(D) = 0{,}02$ et $P_B(D) = 0{,}05$.

Arbre pondéré de la situation :



Fournisseur puis état de l'ampoule

Les événements A et B forment une partition de l'univers : chaque ampoule vient de l'un ou de l'autre, jamais des deux. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D)$$

— **Substitution** :

$$P(D) = 0{,}6\times 0{,}02 + 0{,}4\times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Il y a donc 3,2 % d'ampoules défectueuses dans le magasin.

Contrôle de vraisemblance. Le résultat doit être compris entre les deux taux, 2 % et 5 % ✓ C'est une **moyenne pondérée** par les parts de marché : plus proche de 2 % car A fournit la majorité.

L'erreur classique. Faire la moyenne simple $\frac{2+5}{2} = 3{,}5$ % : elle ignore le poids de chaque fournisseur.

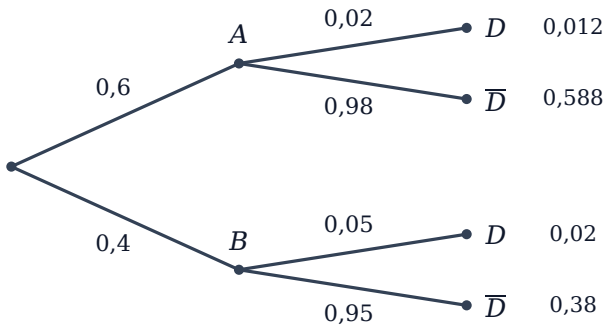
Réponse. $P(D) = 0{,}032$, soit 3,2 %.

Correction de l'exercice 2 – Remonter à la source

On cherche $P_D(B)$, alors que l'énoncé donne $P_B(D)$: il faut **remonter l'arbre**.

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$

Sur l'arbre, on lit le chemin $B \to D$ (numérateur) et la somme des deux chemins menant à D (dénominateur) :



Les chemins qui mènent à D

— **Numérateur** : $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$.
— **Dénominateur** : calculé à l'exercice précédent, $P(D) = 0{,}032$.
— **Quotient** :

$$P_D(B) = \frac{0{,}02}{0{,}032} = 0{,}625$$

Interprétation. Le fournisseur B ne livre que 40 % des ampoules, mais il est responsable de 62,5 **%** des ampoules défectueuses.

— **Contrôle** : $P_D(A) = \frac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$, et $0{,}625 + 0{,}375 = 1$ ✓

La démarche à retenir. Numérateur par la formule des probabilités composées, dénominateur par les probabilités totales : c'est l'exercice type du chapitre.

Réponse. $P_D(B) = 0{,}625$.

Correction de l'exercice 3 – Une partition en trois cas

Les trois ateliers forment une partition : on additionne les trois chemins.

$$P(R) = P(A_1)P_{A_1}(R) + P(A_2)P_{A_2}(R) + P(A_3)P_{A_3}(R)$$

— **Part du troisième atelier** : $1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
— **Substitution** :

$$P(R) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}06$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Calcul** : $0{,}005 + 0{,}012 + 0{,}012 = 0{,}029$.

Le taux de rebut global est de 2,9 %.

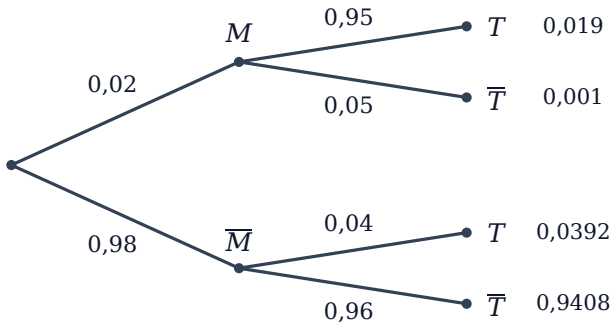
Ce que révèle le détail. Les ateliers 2 et 3 contribuent **chacun** autant que l'autre (1,2 %) alors que l'atelier 2 produit une fois et demie plus de pièces : c'est le taux de rebut de l'atelier 3 qui pèse.

— **Contrôle** : le résultat est compris entre 1 % et 6 % ✓ et la somme des parts vaut $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$ ✓

Réponse. $P(R) = 0{,}029$, soit 2,9 %.

Correction de l'exercice 4 – Le test médical, suite

Arbre pondéré de la situation :



Arbre du dépistage

a) **Probabilités totales** avec la partition $\left\{M ; \overline{M}\right\}$:

$$P(T) = P(M)P_M(T) + P\left(\overline{M}\right)P_{\overline{M}}(T)$$

— **Substitution** : $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}04 = 0{,}019 + 0{,}0392 = 0{,}0582$.
— Environ 5,8 % des tests sont positifs.
— b) On remonte l'arbre :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}019}{0{,}0582} \approx 0{,}326$$

Le résultat qui surprend. Un test positif ne signifie la maladie que dans **environ un tiers des cas**, alors que le test détecte 95 % des malades.

Pourquoi ? La maladie est **rare** : les 98 % de personnes saines, même avec seulement 4 % de faux positifs, produisent deux fois plus de tests positifs que les vrais malades.

Conséquence pratique. C'est la raison pour laquelle un test de dépistage positif est toujours suivi d'un **second test**, plus spécifique.

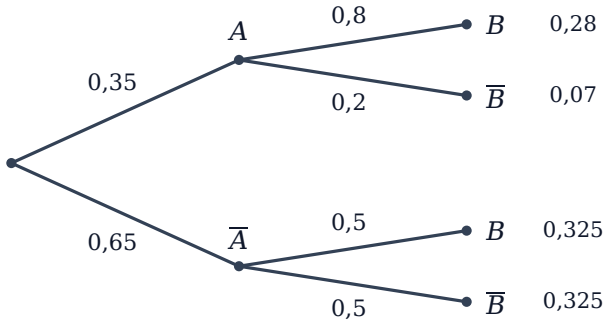
Réponse. a) $P(T) = 0{,}0582$ — b) $P_T(M) \approx 0{,}326$.

Correction de l'exercice 5 – Compléter un arbre

— a) On complète d'abord les branches manquantes par le complément à 1 : $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}65$, $P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Puis on **multiplie le long de chaque chemin** : 0,35 × 0,8 = 0,28 ; 0,35 × 0,2 = 0,07 ; 0,65 × 0,5 = 0,325 (deux fois). Les résultats sont notés au bout des branches :



L'arbre complété

— **Contrôle** : la somme des quatre vaut 0,28 + 0,07 + 0,325 + 0,325 = 1 ✓ C’est toujours le cas : les quatre chemins couvrent toutes les possibilités.

— b) **Probabilités totales** : on additionne les chemins menant à B.

$$P(B) = 0{,}28 + 0{,}325 = 0{,}605$$

— Et par événement contraire :

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}605 = 0{,}395$$

— **Contrôle** : c’est aussi 0,07 + 0,325 = 0,395 ✓

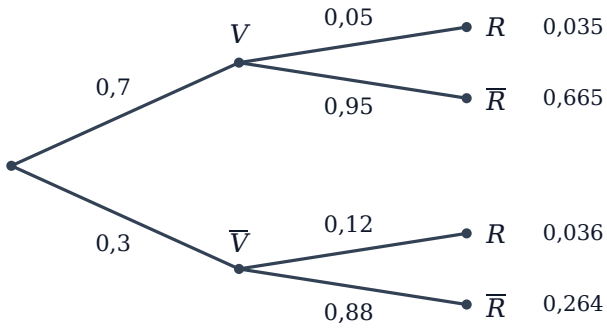
Le réflexe de vérification. La somme de **tous** les chemins vaut 1 ; la somme des branches issues d’un même nœud vaut 1. Deux contrôles gratuits à chaque exercice.

Réponse. b) $P(B) = 0{,}605$ et $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}395$.

Correction de l’exercice 6 – Le trajet quotidien

On note V « venir à vélo » et R « être en retard ».

Arbre pondéré de la situation :



Mode de transport puis retard

a) **Probabilités totales** :

$$P(R) = P(V)P_V(R) + P\left(\overline{V}\right)P_{\overline{V}}(R)$$

— $P(R) = 0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}12 = 0{,}035 + 0{,}036 = 0{,}071$.

— Léo est en retard environ 7,1 % du temps, soit à peu près **un jour sur quatorze**.

— b) On remonte l’arbre :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P_R\left(\overline{V}\right) = \frac{P\left(\overline{V} \cap R\right)}{P(R)} = \frac{0{,}036}{0{,}071} \approx 0{,}507$$

Interprétation. Le bus n'est utilisé que 30 % du temps, mais il est responsable de **plus de la moitié** des retards.

— **Contrôle** : $P_R(V) = \dfrac{0{,}035}{0{,}071} \approx 0{,}493$, et la somme vaut 1 ✓

Un conseil chiffré. S'il prenait toujours le vélo, son taux de retard tomberait de 7,1 % à 5 % : sur un trimestre d'environ 60 jours de classe, cela fait en moyenne $60 \times 0{,}021 \approx 1{,}3$ retard de moins.

Réponse. a) $P(R) = 0{,}071$ — b) environ 0,507.

Correction de l'exercice 7 – L'urne à deux étages

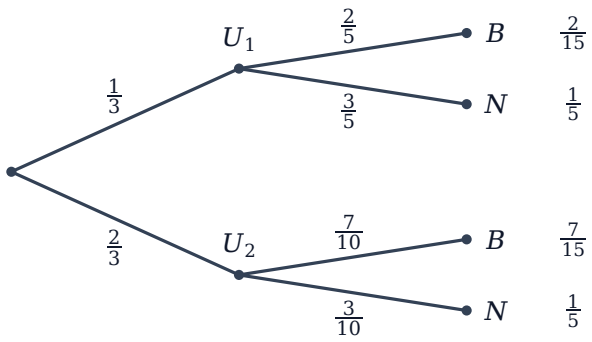
Le choix de l'urne forme une partition :

$$P(U_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(U_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Les tirages dans chaque urne :

$$P_{U_1}(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad P_{U_2}(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Arbre pondéré de la situation :



Choix de l'urne par le dé, puis couleur de la boule

Probabilités totales :

$$P(B) = \frac{1}{3} \times 0{,}4 + \frac{2}{3} \times 0{,}7 = \frac{0{,}4}{3} + \frac{1{,}4}{3} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6$$

La probabilité de tirer une boule blanche est de 0,6.

Contrôle de vraisemblance. Le résultat est compris entre 0,4 et 0,7, plus proche de 0,7 car U_2 est choisie deux fois plus souvent ✓

Remarque. Si l'on mélangeait les deux urnes dans un seul récipient (11 blanches sur 20), la probabilité serait 0,55 : le dé, en favorisant U_2, change le résultat.

Réponse. $P(B) = 0{,}6$.

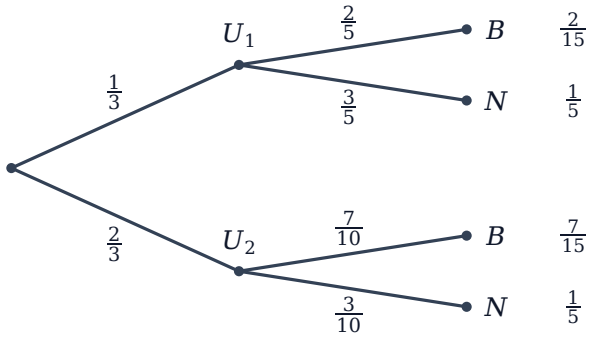
Correction de l'exercice 8 – De quelle urne vient-elle ?

On applique la formule du conditionnement inverse :

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On relit l'arbre du dispositif : le numérateur est le chemin $U_1 \to B$, le dénominateur la somme des deux chemins menant à B.



Les deux chemins qui mènent à une boule blanche

— **Numérateur** : $P(U_1 \cap B) = \frac{1}{3} \times 0{,}4 = \frac{0{,}4}{3} \approx 0{,}1333$.

— **Dénominateur** : $P(B) = 0{,}6$.

— **Quotient** :

$$P_B(U_1) = \frac{0{,}1333}{0{,}6} \approx 0{,}222$$

— Autrement dit, $\frac{2}{9}$ exactement.

Vérification par les fractions.

$$P_B(U_1) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$$

— **Contrôle** : $P_B(U_2) = \dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{10}}{0{,}6} = \dfrac{0{,}4667}{0{,}6} \approx 0{,}778$, et $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1$ ✓

Lecture. L'urne U_1 est choisie une fois sur trois, mais elle n'explique que deux tirages blancs sur neuf : elle contient moins de blanches.

Réponse. $P_B(U_1) = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$.

Correction de l'exercice 9 – Retrouver une probabilité conditionnelle

On écrit la formule des probabilités totales et on isole l'inconnue.

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}(B)$$

— **Substitution** : $0{,}5 = 0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times P_{\overline{A}}(B)$.

— **Calcul** : $0{,}5 = 0{,}26 + 0{,}6\,P_{\overline{A}}(B)$, donc $0{,}6\,P_{\overline{A}}(B) = 0{,}24$.

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$$

— **Vérification** : $0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}26 + 0{,}24 = 0{,}5$ ✓

Interprétation. L'événement B est **plus fréquent** quand A est réalisé (65 % contre 40 %) : les deux événements ne sont donc pas indépendants.

Méthode générale. La formule des probabilités totales contient cinq quantités liées ; connaître quatre d'entre elles permet toujours de trouver la cinquième, en résolvant une équation du premier degré.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

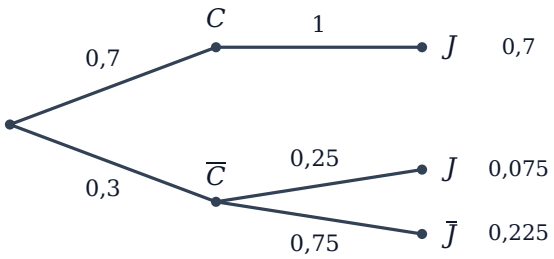
Réponse. $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4$.

Correction de l’exercice 10 – Le questionnaire à choix multiples

On note C « connaître la réponse » et J « répondre juste ».

— **Données** : $P(C) = 0{,}7$, $P_C(J) = 1$ et $P_{\overline{C}}(J) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Arbre pondéré de la situation :



S'il connaît la réponse, il répond juste à coup sûr

a) **Probabilités totales** :

$$P(J) = 0{,}7 \times 1 + 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}7 + 0{,}075 = 0{,}775$$

— L’élève répond juste dans 77,5 % des cas.

— b) **Conditionnement inverse** :

$$P_J(C) = \frac{P(C \cap J)}{P(J)} = \frac{0{,}7}{0{,}775} \approx 0{,}903$$

Interprétation. Une bonne réponse vient d’une vraie connaissance dans environ 90 % des cas : le hasard ne « fabrique » que 7,5 points sur 77,5.

Et si le QCM avait 2 **choix ?** On aurait $P(J) = 0{,}7 + 0{,}15 = 0{,}85$ et $P_J(C) \approx 0{,}824$: moins de propositions, plus de réussite par chance, donc une bonne réponse moins informative.

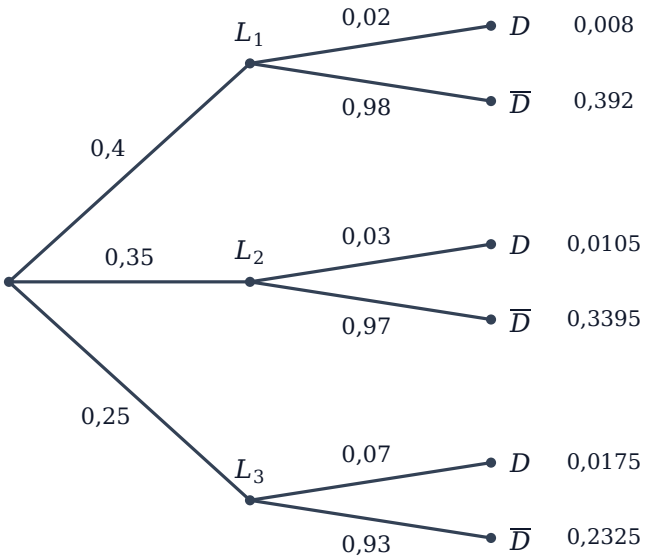
Réponse. a) $P(J) = 0{,}775$ — b) $P_J(C) \approx 0{,}903$.

Correction de l’exercice 11 – Trois lignes de production

— **Part de la ligne 3** : $1 - 0{,}4 - 0{,}35 = 0{,}25$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Une partition en trois lignes

— **Probabilité totale de défaut** :

$$P(D) = 0{,}4 \times 0{,}02 + 0{,}35 \times 0{,}03 + 0{,}25 \times 0{,}07$$

— **Calcul** : $0{,}008 + 0{,}0105 + 0{,}0175 = 0{,}036$.

— **Conditionnement inverse**, ligne par ligne :

Ligne	$P(L_i \cap D)$	$P_D(L_i)$
1	0,008	$\dfrac{0{,}008}{0{,}036} \approx 0{,}222$
2	0,0105	$\approx 0{,}292$
3	0,0175	$\approx 0{,}486$

— **Contrôle** : $0{,}222 + 0{,}292 + 0{,}486 = 1$ ✓

Conclusion. Une pièce défectueuse provient le plus probablement de la **ligne 3**, avec près d'une chance sur deux — alors que cette ligne ne produit qu'un quart des pièces.

Décision industrielle. C'est sur la ligne 3 qu'il faut intervenir : y ramener le taux de défaut à 3 % ferait passer le taux global de 3,6 % à 2,6 %.

Réponse. De la ligne 3, avec $P_D(L_3) \approx 0{,}486$.

Correction de l'exercice 12 – Deux tirages successifs

Premier tirage : $P(R_1) = \dfrac{3}{8}$ et $P(B_1) = \dfrac{5}{8}$.

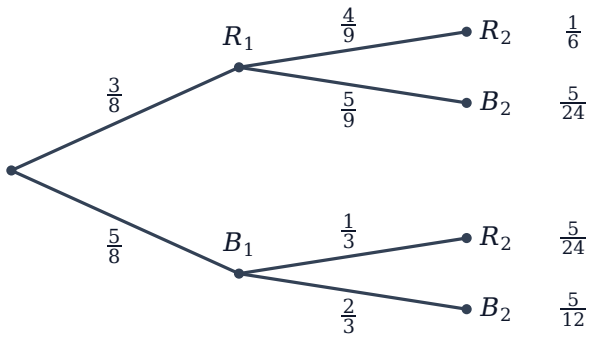
Second tirage : l'urne contient maintenant 9 boules, dont la composition dépend du premier tirage.

— Si la première était rouge : 4 rouges sur 9, donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{4}{9}$.

— Si la première était bleue : 3 rouges sur 9, donc $P_{B_1}(R_2) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Tirage, remise renforcée, second tirage

Probabilités totales :

$$P(R_2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{72} + \frac{15}{72} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

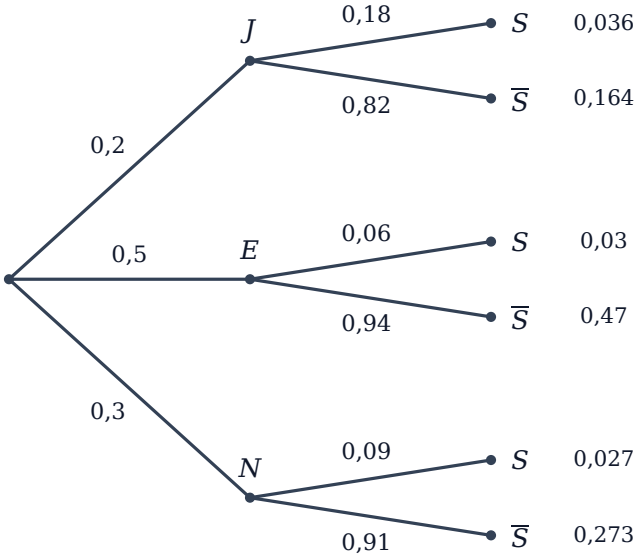
Un résultat remarquable. $P(R_2) = P(R_1) = \frac{3}{8}$: malgré le renforcement, la probabilité de tirer rouge au second tirage est **la même** qu'au premier.

Pourquoi ? Le renforcement favorise autant le rouge quand il sort que le bleu quand il sort : en moyenne, les deux effets se compensent exactement. C'est une propriété du modèle d'urne de Pólya.

Réponse. $P(R_2) = \frac{3}{8}$, comme au premier tirage.

Correction de l'exercice 13 – L'assurance automobile

Arbre pondéré de la situation :



Profil du client (J jeune, E expérimenté, N senior) puis sinistre

a) **Probabilités totales** :

$$P(S) = 0{,}2 \times 0{,}18 + 0{,}5 \times 0{,}06 + 0{,}3 \times 0{,}09$$

— **Calcul** : $0{,}036 + 0{,}03 + 0{,}027 = 0{,}093$.

— Environ 9,3 % des clients déclarent un sinistre dans l'année.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— b) **Conditionnement inverse** :

$$P_S(J) = \frac{0{,}036}{0{,}093} \approx 0{,}387$$

Interprétation. Les jeunes conducteurs représentent 20 % des clients mais près de 39 **%** des sinistres déclarés : c'est la justification chiffrée des surprimes appliquées à ce profil.

— **Contrôle** : $P_S(E) = \frac{0{,}03}{0{,}093} \approx 0{,}323$ et $P_S(N) = \frac{0{,}027}{0{,}093} \approx 0{,}290$; la somme des trois vaut 1 ✓

Nuance à garder en tête. Ce calcul décrit une **corrélation**, pas une responsabilité individuelle : il porte sur un profil moyen, pas sur un conducteur donné.

Réponse. a) $P(S) = 0{,}093$ — b) environ 38,7 %.

Correction de l'exercice 14 – Un arbre à compléter par le bas

Étape 1 — l'intersection, qui sert de pivot :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$$

Étape 2 — la première conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}25} = 0{,}48$$

Étape 3 — la seconde, par les probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}(B)$$

— $0{,}4 = 0{,}12 + 0{,}75 \times P_{\overline{A}}(B)$, donc $0{,}75\,P_{\overline{A}}(B) = 0{,}28$ et

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}28}{0{,}75} \approx 0{,}373$$

— **Vérification** : $0{,}25 \times 0{,}48 + 0{,}75 \times 0{,}373 \approx 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}4$ ✓

La clé de ce type d'exercice. L'intersection $P(A \cap B)$ est le **point de passage** entre les deux conditionnements : on la calcule d'abord, tout le reste en découle.

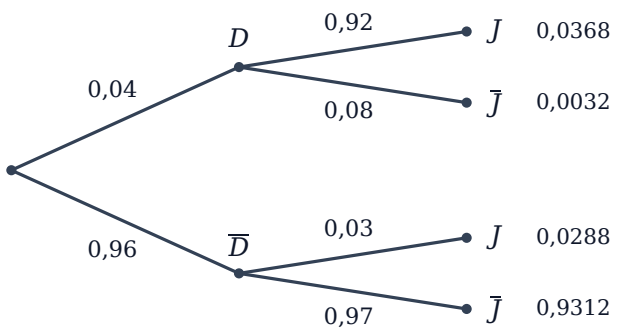
Réponse. $P_A(B) = 0{,}48$ et $P_{\overline{A}}(B) \approx 0{,}373$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le contrôle qualité

On note D « défectueux » et J « rejeté ».

— **Données** : $P(D) = 0{,}04$, $P_D(J) = 0{,}92$ et $P_{\overline{D}}(J) = 0{,}03$.

Arbre pondéré de la situation :



Arbre du contrôle automatique

a) **Probabilités totales** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(J) = 0{,}04 \times 0{,}92 + 0{,}96 \times 0{,}03 = 0{,}0368 + 0{,}0288 = 0{,}0656$$

b) **Conditionnement inverse** :

$$P_J(D) = \frac{0{,}0368}{0{,}0656} \approx 0{,}561$$

— Un peu plus de la moitié des rejets sont justifiés.

— c) **Composants acceptés** : $P\left(\bar{J}\right) = 1 - 0{,}0656 = 0{,}9344$, et

$$P\left(D \cap \bar{J}\right) = 0{,}04 \times 0{,}08 = 0{,}0032$$

$$P_{\bar{J}}(D) = \frac{0{,}0032}{0{,}9344} \approx 0{,}0034$$

Lecture industrielle. Le contrôle divise le taux de défauts livrés par plus de dix : de 4 % à 0,34 %. En contrepartie, il jette 2,88 % de pièces correctes — c’est le coût du filtrage.

— **Contrôle** : $0{,}0368 + 0{,}0032 = 0{,}04 = P(D)$ ✓

Réponse. a) 0,0656 — b) environ 0,561 — c) environ 0,0034.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).