Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : indépendance, répétitions et prise de décision

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Indépendance de deux événements.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_B(A) = P(A) \iff P_A(B) = P(B)$$

— Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

— **Ne pas confondre** avec « incompatibles » : deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont **dépendants**.

Épreuves répétées indépendantes. Pour n répétitions d'une épreuve de probabilité de succès p :

$$P(\text{aucun succès}) = (1-p)^n \qquad P(\text{au moins un succès}) = 1-(1-p)^n$$

$$P(\text{que des succès}) = p^n$$

Seuil. Pour trouver le plus petit n tel que $1-(1-p)^n > \alpha$, on cherche le premier n tel que

$$(1-p)^n < 1-\alpha$$

en calculant les puissances successives à la calculatrice (mode tableau) ou avec une boucle Python « tant que » : la suite $(1-p)^n$ est **décroissante**, donc dès qu'un terme passe sous le seuil, tous les suivants aussi.

Systèmes en série et en parallèle. Pour des composants indépendants de fiabilités p_i :

$$\text{série} : \prod_i p_i \qquad \text{parallèle} : 1-\prod_i (1-p_i)$$

Prise de décision. On compare la probabilité de l'observation sous chaque hypothèse. Si l'observation est **très improbable** sous une hypothèse, on la rejette — c'est l'idée du **rapport de vraisemblance**.

Correction de l'exercice 1 – Indépendance et complémentaires

— **Intersection** : $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.

— **Avec le complémentaire** : A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants, donc

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

— **Contrôle** : $0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3 = P(A)$ ✓

— **Réunion** :

$$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$$

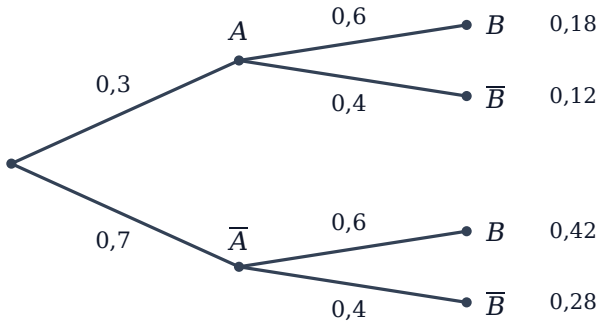
— **Contrôle par le contraire** : $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$, et $1 - 0{,}28 = 0{,}72$ ✓

— **Les quatre cases** : 0,18, 0,12, 0,42, 0,28, de somme 1 ✓

— **Vérification de l'indépendance des complémentaires** : $P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$ ✓ — c'est bien la case correspondante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L’arbre pondéré montre l’indépendance : sous A comme sous $\overline{A}$, la branche B vaut 0,6. Les quatre feuilles sont les quatre cases :



Indépendance : mêmes branches sous A et sous $\bar{A}$

— **Astuce** : avec l’indépendance, tout le tableau se remplit par de simples **produits** de marges.

Réponse. 0,18, 0,12 et 0,72.

Correction de l’exercice 2 – Au moins un succès

— **Contraire** : « aucun 6 » a pour probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

— **Calcul** :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0{,}40188$$

— **Réponse** :

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - 0{,}40188 \approx 0{,}59812$$

— **Contrôle de l’ordre de grandeur** : à peine plus d’une chance sur deux, alors que l’intuition naïve « $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$ » est très surestimée ✓

— **Pourquoi l’addition est fausse** : les événements « un 6 au lancer i » ne sont **pas incompatibles** — on peut avoir plusieurs 6.

— **Contrôle par la binomiale** : $P(X = 0) = 0{,}40188$, $P(X = 1) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}40188$ — égales, curieusement, car $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ✓

— **Nombre de lancers pour dépasser** 0,9 : on cherche $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}1$; à la calculatrice, $\left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0{,}112$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0{,}093$, donc 13 lancers.

Réponse. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}598$.

Correction de l’exercice 3 – Seuil de répétitions

— **Inéquation** : $1 - 0{,}85^n > 0{,}99$, soit $0{,}85^n < 0{,}01$.

— **Recherche du seuil** : la suite $0{,}85^n$ est décroissante ; on calcule ses termes à la calculatrice (mode tableau) jusqu’à passer sous 0,01.

— **Vérifications** : $0{,}85^{28} \approx 0{,}010562 > 0{,}01$, donc 28 parties donnent $1 - 0{,}010562 \approx 0{,}98944 < 0{,}99$ — insuffisant ✓

— $0{,}85^{29} \approx 0{,}008977 < 0{,}01$, soit $\approx 0{,}99102 > 0{,}99$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Réponse** : **29 parties**.

— **Comparaison** : pour dépasser seulement 0,9, il suffit de 15 parties ($0{,}85^{14} \approx 0{,}103$ et $0{,}85^{15} \approx 0{,}087$) — la dernière tranche de certitude coûte presque autant que tout le reste.

— **Programme Python** pour trouver le seuil :

```
n, q = 0, 1
while q >= 0.01:
    q = 0.85 * q
    n = n + 1
print(n)   # affiche 29
```

Réponse. $n = 29$ parties.

Correction de l’exercice 4 – Système en série et en parallèle

En série — tous doivent fonctionner :

$$0{,}92 \times 0{,}88 \times 0{,}95 = 0{,}76912$$

En parallèle — il suffit qu’un fonctionne, donc on passe par le contraire :

$$1 - 0{,}08 \times 0{,}12 \times 0{,}05 = 1 - 0{,}00048 = 0{,}99952$$

— **Comparaison** : 76,9 % contre 99,95 % — la redondance change tout.

— **Contrôle du calcul en série** : $0{,}92 \times 0{,}88 = 0{,}8096$, puis $\times 0{,}95 = 0{,}76912$ ✓

— **Maillon faible** : en série, la fiabilité 0,769 est **inférieure** au plus mauvais composant (0,88) ✓

— **Probabilité de panne** : 23,1 % en série contre 0,048 % en parallèle — un facteur **481**.

— **Système mixte** : deux relais en parallèle ($1 - 0{,}08 \times 0{,}12 = 0{,}9904$) suivis du troisième en série donnerait $0{,}9904 \times 0{,}95 = 0{,}94088$.

— **Leçon d’ingénierie** : doubler le composant le plus fragile est le meilleur investissement.

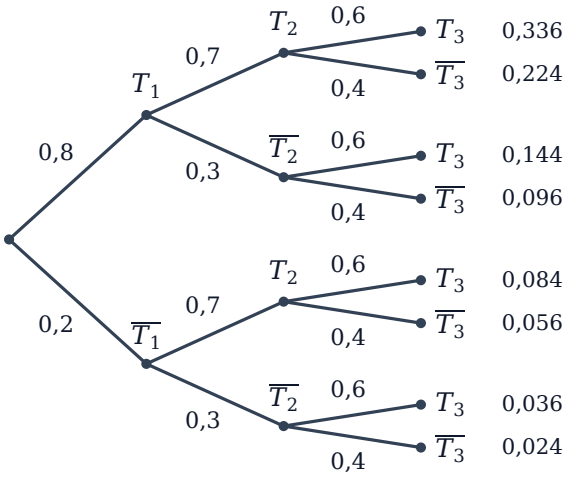
Réponse. Série : 0,76912 · parallèle : 0,99952.

Correction de l’exercice 5 – Indépendance de trois événements

Arbre des trois tirs. Les tirs étant indépendants, les branches d’un même tireur ont la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

même valeur à chaque nœud. Exactement deux touches correspondent aux chemins dont **une seule** branche est barrée :



Les trois tirs, indépendants : huit chemins

— **Trois cas disjoints** (celui qui manque varie) :
— $\overline{T_1}T_2T_3$: $0{,}2 \times 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}084$;
— $T_1\overline{T_2}T_3$: $0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}144$;
— $T_1T_2\overline{T_3}$: $0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}224$.
— **Somme** :

$$P = 0{,}084 + 0{,}144 + 0{,}224 = 0{,}452$$

— **Contrôle par la loi complète** :
— aucun : $0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}024$;
— exactement un :
$0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}096 + 0{,}056 + 0{,}036 = 0{,}188$;
— exactement deux : $0{,}452$;
— les trois : $0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}336$.
— **Somme totale** : $0{,}024 + 0{,}188 + 0{,}452 + 0{,}336 = 1$ ✓
— **Espérance du nombre de touches**, calculée sur cette loi :
$0 \times 0{,}024 + 1 \times 0{,}188 + 2 \times 0{,}452 + 3 \times 0{,}336 = 0{,}188 + 0{,}904 + 1{,}008 = 2{,}1$ ✓
— **Remarque** : les probabilités étant **différentes**, ce n’est pas une loi binomiale — il faut énumérer les chemins.

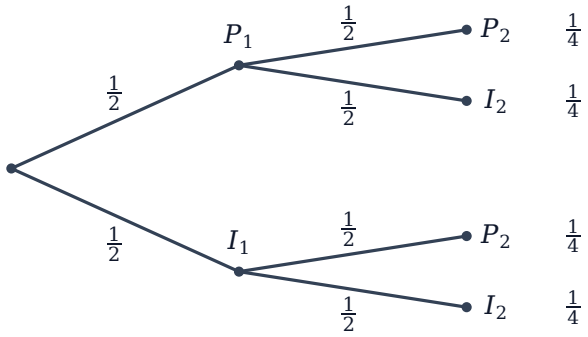
Réponse. $P = 0{,}452$.

Correction de l’exercice 6 – Dépendance à identifier

— **Probabilité de** A : $P(A) = \dfrac{1}{2}$.
— **Probabilité de** B : la somme est paire si les deux dés ont la **même parité**, soit $\dfrac{1}{2}$ des cas (18 sur 36).
— **Intersection** : premier pair **et** somme paire signifie que les deux dés sont pairs, soit $\dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.
— **Test** : $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} = P(A \cap B)$ ✓
— **Conclusion** : les événements sont **indépendants** — résultat contre-intuitif, puisque la somme dépend manifestement du premier dé !

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



P : pair, I : impair ; la somme est paire sur les chemins P1-P2 et I1-I2

— **Explication** : quelle que soit la parité du premier dé, le second détermine à parts égales la parité de la somme (3 chances sur 6) ✓

— **Lecture** : $P_A(B) = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2} = P(B)$ ✓

— **Contre-exemple pour comparer** : avec B' « la somme vaut 7 », on a aussi l'indépendance ; mais avec B'' « la somme vaut au moins 10 », $P(B'') = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ et $P(A \cap B'') = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{1}{12}$ — cette fois il y a **dépendance**.

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$.

Correction de l'exercice 7 – Un appareil jour après jour

— **Trente jours sans panne** :

$$0{,}98^{30} \approx 0{,}54548$$

— **Probabilité de panne dans le mois** : $1 - 0{,}54548 \approx 0{,}45452$, soit presque une chance sur deux.

— **Approximation courante** : $30 \times 0{,}02 = 0{,}6$ surestime nettement le risque réel de 0,455 ✓

— **Seuil de $\dfrac{1}{2}$** : on cherche le premier n tel que $0{,}98^n < 0{,}5$. La suite $0{,}98^n$ est décroissante ; à la calculatrice :

$$0{,}98^{34} \approx 0{,}5031 \qquad 0{,}98^{35} \approx 0{,}4931$$

— Donc à partir de 35 **jours**, l'appareil a moins d'une chance sur deux de n'avoir connu aucune panne.

— **Cohérence** : $30 < 35$, et l'on a bien trouvé $0{,}98^{30} \approx 0{,}545 > 0{,}5$ ✓

— **Un an** : $0{,}98^{365} \approx 6{,}3 \times 10^{-4}$ — la panne est quasi certaine sur une année.

Réponse. $0{,}98^{30} \approx 0{,}545$; à partir de 35 jours.

Correction de l'exercice 8 – Deux machines

— **Contraire** : les deux pièces sont bonnes, avec la probabilité

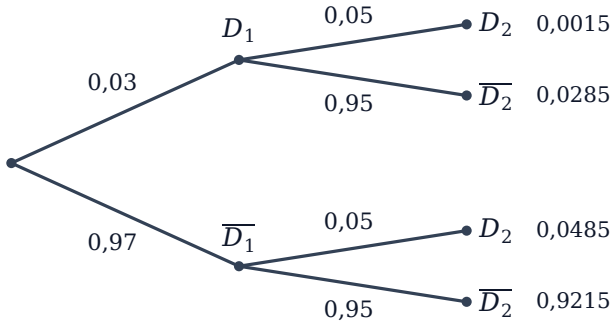
$$0{,}97 \times 0{,}95 = 0{,}9215$$

— **Réponse** :

$$P(\text{au moins une défectueuse}) = 1 - 0{,}9215 = 0{,}0785$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sur l'arbre (D_i : la pièce de la machine i est défectueuse), trois chemins sur quatre contiennent au moins une pièce défectueuse :



Pièce de la machine 1 puis pièce de la machine 2

— **Contrôle par la somme des cas** :
— seule la première défectueuse : $0{,}03 \times 0{,}95 = 0{,}0285$;
— seule la seconde : $0{,}97 \times 0{,}05 = 0{,}0485$;
— les deux : $0{,}03 \times 0{,}05 = 0{,}0015$.
— **Somme** : $0{,}0285 + 0{,}0485 + 0{,}0015 = 0{,}0785$ ✓
— **Comparaison à l'addition naïve** : $0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}08$ — l'écart avec 0,0785 est exactement l'intersection 0,0015, comptée deux fois ✓
— **Formule** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ pour des événements indépendants.
— **Ordre de grandeur** : quand les probabilités sont **petites**, l'addition est une bonne approximation — l'erreur est du second ordre.

Réponse. $1 - 0{,}97 \times 0{,}95 = 0{,}0785$.

Correction de l'exercice 9 – Prise de décision

— **Sous l'hypothèse « équilibrée »** ($p = 0{,}5$) :

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0{,}5^{10} = 45 \times \frac{1}{1024} \approx 0{,}04395$$

— **Sous l'hypothèse « truquée »** ($p = 0{,}8$) :

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0{,}8^{8} \times 0{,}2^{2} = 45 \times 0{,}16777 \times 0{,}04 \approx 0{,}30199$$

— **Rapport de vraisemblance** : $\dfrac{0{,}30199}{0{,}04395} \approx 6{,}87$.
— **Conclusion** : l'hypothèse « **truquée** » est environ **7 fois** plus vraisemblable que « équilibrée ».
— **Contrôle des ordres de grandeur** : 8 piles sur 10 correspond exactement à l'espérance $10 \times 0{,}8 = 8$ de la pièce truquée, alors que la pièce équilibrée en attendrait 5 ✓
— **Prudence** : « plus vraisemblable » n'est pas « certain » — obtenir 8 piles avec une pièce équilibrée reste possible (environ 4,4 %).
— **Probabilité d'au moins** 8 **piles pour une pièce équilibrée** : $\dfrac{45 + 10 + 1}{1024} = \dfrac{56}{1024} \approx 0{,}05469$ — tout juste au-dessus du seuil usuel de 5 %.
— **Avec** 9 **piles**, le rapport passerait à $\dfrac{0{,}26844}{0{,}00977} \approx 27{,}5$ — la conclusion serait bien plus nette.

Réponse. « Truquée » : 0,302 contre 0,044, soit un rapport de 6,9.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Indépendance conditionnelle

— **Intersection** : $P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}1$.
— **Test d'indépendance** : $P(A)P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 \neq 0{,}1$ — **pas** indépendants.
— **Sens de la dépendance** : $P_B(A) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25 < 0{,}5 = P(A)$ — la réalisation de B **défavorise** A.
— **Complémentaire conditionnel** :

$$P_B\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

— **Contrôle direct** : $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$, et $\dfrac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$ ✓
— **Les quatre cases** : 0,1, 0,4, 0,3, 0,2, de somme 1 ✓
— **Contrôle de la réunion** : $1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ ✓
— **Remarque utile** : $P_B\left(\overline{A}\right) = 1 - P_B(A)$ est toujours vrai — le complémentaire fonctionne **à l'intérieur** d'un conditionnement, ce qui n'est pas le cas de $P_{\overline{B}}(A)$, sans lien simple avec $P_B(A)$.

Réponse. Non indépendants ($0{,}1 \neq 0{,}2$) ; $P_B\left(\overline{A}\right) = 0{,}75$.

Correction de l'exercice 11 – Problème des anniversaires

— **Contraire** : tous les anniversaires sont **distincts**.

$$P(\text{tous distincts}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365}$$

— **Calcul** : ce produit de 10 facteurs vaut environ 0,88305.
— **Réponse** :

$$P \approx 1 - 0{,}88305 = 0{,}11695$$

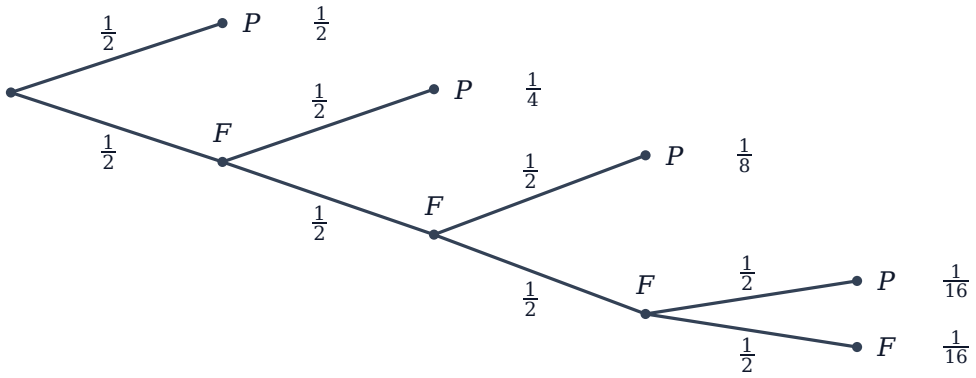
— **Lecture** : environ 11,7 % — bien plus que l'intuition ne le suggère pour seulement 10 personnes.
— **Contrôle du raisonnement** : il y a $\dfrac{10 \times 9}{2} = 45$ paires de personnes, chacune coïncidant avec la probabilité $\dfrac{1}{365} \approx 0{,}00274$; l'approximation $45 \times 0{,}00274 \approx 0{,}1233$ est proche de 0,117 ✓
— **Seuil célèbre** : à 23 personnes, la probabilité dépasse 0,5 (elle vaut environ 0,5073).
— **À** 50 **personnes** : environ 0,97 ; à 60, plus de 0,99.
— **Méthode** : comme toujours pour « au moins deux », c'est le **contraire** (« tous différents ») qui se calcule facilement.

Réponse. $P \approx 0{,}117$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Épreuves jusqu’au premier succès

Arbre de l’expérience : on s’arrête au premier pile ; la dernière feuille, *FFFF*, regroupe les cas où il faut plus de 4 lancers.



On s'arrête dès qu'on obtient pile (au plus 4 lancers représentés)

— **Exactement** 4 **lancers** : trois faces puis un pile.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

— **Au plus** 4 **lancers** — par le contraire (« les 4 premiers sont face ») :

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

— **Contrôle par la somme** : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$ ✓

— **Lecture de l’arbre** : la probabilité qu’il faille exactement k lancers vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^k$; les cinq feuilles ont pour somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 1$ ✓

— **Propriété d’absence de mémoire** : après trois faces, la probabilité de réussir au lancer suivant reste $\frac{1}{2}$ — la pièce « n’a pas de mémoire », contrairement à ce que suggère l’illusion du joueur.

Réponse. $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ et $\frac{15}{16} = 0{,}9375$.

Correction de l’exercice 13 – Probabilité d’un chemin long

— **Sans erreur** : quatre bons choix indépendants.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

— **Exactement une erreur** : il y a $\binom{4}{1} = 4$ positions possibles pour l’erreur, chacune de probabilité $\frac{1}{16}$.

$$P = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

— **Au plus une erreur** :

$$0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle par la loi binomiale** : le nombre d'erreurs suit $B(4\,;0{,}5)$, de coefficients 1, 4, 6, 4, 1 sur 16.
— **Somme** : $\dfrac{1+4+6+4+1}{16} = 1$ ✓
— **Au plus une erreur** : $\dfrac{1+4}{16} = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$ ✓
— **Espérance du nombre d'erreurs** : $4 \times 0{,}5 = 2$.
— **Lecture** : le cas le plus probable est 2 erreurs ($\dfrac{6}{16} = 0{,}375$) — sortir du premier coup est rare.

Réponse. $\dfrac{1}{16} = 0{,}0625$ sans erreur ; $\dfrac{5}{16} = 0{,}3125$ avec au plus une.

Correction de l'exercice 14 – Comparaison de deux stratégies

Premier pari.

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} \approx 1 - 0{,}48225 = 0{,}51775$$

Second pari. La probabilité d'un double 6 à un lancer vaut $\dfrac{1}{36}$, donc

$$P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0{,}50860 = 0{,}49140$$

— **Conclusion** : le **premier** pari est favorable (51,8 %), le second légèrement défavorable (49,1 %).
— **Contexte historique** : c'est le « problème du chevalier de Méré », soumis à Pascal en 1654 — l'un des actes de naissance du calcul des probabilités.
— **Pourquoi l'intuition échoue** : le chevalier raisonnait par proportionnalité ($4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{24}{36}$), mais $1 - q^n$ n'est **pas** proportionnel à n.
— **Contrôle** : $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48225$ et $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}50860$ ✓
— **Nombre de lancers pour équilibrer le second pari** : $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}5086$ et $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{25} \approx 0{,}4945$, donc **25 lancers** suffiraient à le rendre favorable ($P \approx 0{,}5055$).

Réponse. Le premier (0,518 contre 0,491) — problème du chevalier de Méré.

Correction de l'exercice 15 – Fiabilité et redondance

— **Fiabilité en parallèle** : $1 - 0{,}1^n$.
— **Condition** : $1 - 0{,}1^n \geq 0{,}9999$, soit $0{,}1^n \leq 10^{-4}$.
— **Résolution** : $10^{-n} \leq 10^{-4}$ donne

$$n \geq 4$$

— **Vérifications** : avec 3 composants, $1 - 10^{-3} = 0{,}999 < 0{,}9999$ ✓ (insuffisant) ; avec 4, $1 - 10^{-4} = 0{,}9999$ ✓ — la borne est atteinte exactement.
— **Réponse** : **4 composants**.
— **Progression** : 1 composant 0,9 ; 2 → 0,99 ; 3 → 0,999 ; 4 → 0,9999 — chaque ajout gagne un **neuf** supplémentaire.
— **Coût de la fiabilité** : passer de 0,9 à 0,9999 demande de quadrupler le matériel, pour une amélioration de seulement 0,0999 en valeur absolue — mais une division par 1000 du **risque de panne**, ce qui est la bonne façon de lire ce gain.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **En série au contraire** : 4 composants donneraient $0{,}9^4 = 0{,}6561$ — la fiabilité s'effondre.

Réponse. 4 composants ($1 - 10^{-4} = 0{,}9999$).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : contrôle et décision

a) **Aucune défectueuse** :

$$0{,}95^{20} \approx 0{,}35849$$

b) **Lot à** $p = 0{,}05$**.** Avec $X \sim B(20\,;0{,}05)$:

— $P(X = 0) \approx 0{,}35849$;

— $P(X = 1) = 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} = 0{,}95^{19} \approx 0{,}37735$.

$$P(X \leq 1) \approx 0{,}73584$$

Lot à $p = 0{,}20$**.** Avec $X \sim B(20\,;0{,}20)$:

— $P(X = 0) = 0{,}8^{20} \approx 0{,}011529$;

— $P(X = 1) = 20 \times 0{,}2 \times 0{,}8^{19} = 4 \times 0{,}014412 \approx 0{,}057646$.

$$P(X \leq 1) \approx 0{,}069175$$

c) **Commentaire.**

— **Risque du producteur** : un bon lot ($p = 0{,}05$) est rejeté dans $1 - 0{,}736 = 26{,}4\,\%$ des cas — c'est beaucoup.

— **Risque du client** : un mauvais lot ($p = 0{,}20$) est accepté dans $6{,}9\,\%$ des cas — c'est acceptable.

— **Conclusion** : le contrôle est **sévère**. Il protège bien le client mais pénalise le producteur.

— **Piste d'amélioration** : accepter jusqu'à deux défectueuses ferait passer l'acceptation à 0,9245 pour $p = 0{,}05$ (risque producteur ramené à $7{,}6\,\%$) mais à 0,2061 pour $p = 0{,}20$ — le risque client triplerait.

— **Le vrai levier** : augmenter la **taille de l'échantillon**, qui seule permet de réduire les deux risques simultanément.

— **Contrôle** : $E(X) = 1$ pour $p = 0{,}05$ et $E(X) = 4$ pour $p = 0{,}20$ — le seuil « au plus une » est placé exactement sur l'espérance du bon lot, d'où sa sévérité ✓

Réponse. a) $\approx 0{,}358$ · b) $\approx 0{,}736$ et $\approx 0{,}069$ · c) contrôle sévère (risque producteur $26{,}4\,\%$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).