

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
indépendance, répétitions et prise de décision
Probabilités conditionnelles — Première spé maths
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Indépendance de deux événements.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_B(A) = P(A) \iff P_A(B) = P(B)$$

- Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.
- **Ne pas confondre** avec « incompatibles » : deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont **dépendants**.

Épreuves répétées indépendantes. Pour n répétitions d'une épreuve de probabilité de succès p :

$$P(\text{aucun succès}) = (1 - p)^n \quad P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n$$

$$P(\text{que des succès}) = p^n$$

Seuil. Pour trouver le plus petit n tel que $1 - (1 - p)^n > \alpha$, on résout

$$(1 - p)^n < 1 - \alpha \implies n > \frac{\ln(1 - \alpha)}{\ln(1 - p)}$$

en se souvenant que $\ln(1 - p) < 0$ **inverse** le sens de l'inégalité.

Systèmes en série et en parallèle. Pour des composants indépendants de fiabilités p_i :

$$\text{série: } \prod_i p_i \quad \text{parallèle: } 1 - \prod_i (1 - p_i)$$

Prise de décision. On compare la probabilité de l'observation sous chaque hypothèse. Si l'observation est **très improbable** sous une hypothèse, on la rejette — c'est l'idée du **rapport de vraisemblance**.

Correction de l'exercice 1 - Indépendance et complémentaires

- **Intersection** : $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.
- **Avec le complémentaire** : A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants, donc

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$
- **Contrôle** : $0,18 + 0,12 = 0,3 = P(A)$ ✓
- **Réunion** :

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72$$
- **Contrôle par le contraire** : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$, et $1 - 0,28 = 0,72$ ✓
- **Les quatre cases** : 0,18, 0,12, 0,42, 0,28, de somme 1 ✓
- **Vérification de l'indépendance des complémentaires** :

$$P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28 \text{ ✓ — c'est bien la case correspondante.}$$
- **Astuce** : avec l'indépendance, tout le tableau se remplit par de simples **produits** de marges.

Réponse. 0,18, 0,12 et 0,72.

Correction de l'exercice 2 - Au moins un succès

— **Contraire** : « aucun 6 » a pour probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

— **Calcul** :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0,40188$$

— **Réponse** :

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - 0,40188 \approx 0,59812$$

— **Contrôle de l'ordre de grandeur** : à peine plus d'une chance sur deux, alors que l'intuition naïve « $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,83$ » est très surestimée ✓

— **Pourquoi l'addition est fautive** : les événements « un 6 au lancer i » ne sont **pas incompatibles** — on peut avoir plusieurs 6.

— **Contrôle par la binomiale** : $P(X = 0) = 0,40188$, $P(X = 1) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,40188$
— égales, curieusement, car $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ✓

— **Nombre de lancers pour dépasser 0,9** : $n > \frac{\ln 0,1}{\ln(5/6)} \approx 12,63$, donc 13 lancers.

Réponse. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,598$.

Correction de l'exercice 3 - Seuil de répétitions

— **Inéquation** : $1 - 0,85^n > 0,99$, soit $0,85^n < 0,01$.

— **Logarithme** (avec $\ln 0,85 < 0$, sens inversé) :

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,85} \approx \frac{-4,6052}{-0,16252} \approx 28,34$$

— **Conclusion** : $n \geq 29$ parties.

— **Vérifications** : $0,85^{28} \approx 0,010562 > 0,01$, donc 28 parties donnent $1 - 0,010562 \approx 0,98944 < 0,99$ — insuffisant ✓

— $0,85^{29} \approx 0,008977 < 0,01$, soit $\approx 0,99102 > 0,99$ ✓

— **Réponse** : **29 parties**.

— **Comparaison** : pour dépasser seulement 0,9, il suffirait de $\frac{\ln 0,1}{\ln 0,85} \approx 14,17$, donc 15 parties — la dernière tranche de certitude coûte presque autant que tout le reste.

— **Espérance** : le nombre moyen de parties avant la première victoire vaut $\frac{1}{0,15} \approx 6,67$
— bien inférieur à 29, car la moyenne est tirée par les succès rapides.

Réponse. $n = 29$ parties.

Correction de l'exercice 4 - Système en série et en parallèle

En série — tous doivent fonctionner :

$$0,92 \times 0,88 \times 0,95 = 0,76912$$

En parallèle — il suffit qu'un fonctionne, donc on passe par le contraire :

$$1 - 0,08 \times 0,12 \times 0,05 = 1 - 0,00048 = 0,99952$$

— **Comparaison** : 76,9 % contre 99,95 % — la redondance change tout.

- **Contrôle du calcul en série** : $0,92 \times 0,88 = 0,8096$, puis $\times 0,95 = 0,76912$ ✓
- **Maillon faible** : en série, la fiabilité 0,769 est **inférieure** au plus mauvais composant (0,88) ✓
- **Probabilité de panne** : 23,1 % en série contre 0,048 % en parallèle — un facteur **481**.
- **Système mixte** : deux relais en parallèle ($1 - 0,08 \times 0,12 = 0,9904$) suivis du troisième en série donnerait $0,9904 \times 0,95 = 0,94088$.
- **Leçon d'ingénierie** : doubler le composant le plus fragile est le meilleur investissement.

Réponse. Série : 0,76912 · parallèle : 0,99952.

Correction de l'exercice 5 - Indépendance de trois événements

- **Trois cas disjoints** (celui qui manque varie) :
 - $\overline{T_1}T_2T_3$: $0,2 \times 0,7 \times 0,6 = 0,084$;
 - $T_1\overline{T_2}T_3$: $0,8 \times 0,3 \times 0,6 = 0,144$;
 - $T_1T_2\overline{T_3}$: $0,8 \times 0,7 \times 0,4 = 0,224$.
 - **Somme** :
- $$P = 0,084 + 0,144 + 0,224 = 0,452$$
- **Contrôle par la loi complète** :
 - aucun : $0,2 \times 0,3 \times 0,4 = 0,024$;
 - exactement un :
 $0,8 \times 0,3 \times 0,4 + 0,2 \times 0,7 \times 0,4 + 0,2 \times 0,3 \times 0,6 = 0,096 + 0,056 + 0,036 = 0,188$;
 - exactement deux : 0,452 ;
 - les trois : $0,8 \times 0,7 \times 0,6 = 0,336$.
 - **Somme totale** : $0,024 + 0,188 + 0,452 + 0,336 = 1$ ✓
 - **Espérance du nombre de touches** : $0,8 + 0,7 + 0,6 = 2,1$ ✓ — cohérent avec un mode à 2.
 - **Contrôle par l'espérance** :
 $0 \times 0,024 + 1 \times 0,188 + 2 \times 0,452 + 3 \times 0,336 = 0,188 + 0,904 + 1,008 = 2,1$ ✓
 - **Remarque** : les probabilités étant **différentes**, ce n'est pas une loi binomiale — il faut énumérer les chemins.

Réponse. $P = 0,452$.

Correction de l'exercice 6 - Dépendance à identifier

- **Probabilité de A** : $P(A) = \frac{1}{2}$.
- **Probabilité de B** : la somme est paire si les deux dés ont la **même parité**, soit $\frac{1}{2}$ des cas (18 sur 36).
- **Intersection** : premier pair **et** somme paire signifie que les deux dés sont pairs, soit $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- **Test** : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$ ✓
- **Conclusion** : les événements sont **indépendants** — résultat contre-intuitif, puisque la somme dépend manifestement du premier dé !
- **Explication** : quelle que soit la parité du premier dé, le second détermine à parts égales la parité de la somme (3 chances sur 6) ✓
- **Lecture** : $P_A(B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(B)$ ✓

- **Contre-exemple pour comparer** : avec B' « la somme vaut 7 », on a aussi l'indépendance ; mais avec B'' « la somme vaut au moins 10 », $P(B'') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B'') = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{12}$ — cette fois il y a **dépendance**.

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$.

Correction de l'exercice 7 - Tirages successifs indépendants

- **Trente jours sans panne** :

$$0,98^{30} \approx 0,54548$$

- **Probabilité de panne dans le mois** : $1 - 0,54548 \approx 0,45452$, soit presque une chance sur deux.
- **Approximation courante** : $30 \times 0,02 = 0,6$ surestime nettement le risque réel de 0,455 ✓
- **Espérance du jour de la première panne** (loi géométrique) :

$$E = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ jours}$$

- **Contrôle de cohérence** : l'espérance 50 dépasse 30, ce qui est cohérent avec une probabilité de survie à 30 jours supérieure à $\frac{1}{2}$ ✓
- **Médiane** : $0,98^n < 0,5$ donne $n > \frac{\ln 0,5}{\ln 0,98} \approx 34,31$, donc **35 jours** — nettement inférieure à l'espérance 50, signe d'une distribution très asymétrique.
- **Un an** : $0,98^{365} \approx 6,3 \times 10^{-4}$ — la panne est quasi certaine sur une année.

Réponse. $0,98^{30} \approx 0,545$; première panne au jour 50 en moyenne.

Correction de l'exercice 8 - Deux machines

- **Contraire** : les deux pièces sont bonnes, avec la probabilité

$$0,97 \times 0,95 = 0,9215$$

- **Réponse** :

$$P(\text{au moins une défectueuse}) = 1 - 0,9215 = 0,0785$$

- **Contrôle par la somme des cas** :
- seule la première défectueuse : $0,03 \times 0,95 = 0,0285$;
- seule la seconde : $0,97 \times 0,05 = 0,0485$;
- les deux : $0,03 \times 0,05 = 0,0015$.
- **Somme** : $0,0285 + 0,0485 + 0,0015 = 0,0785$ ✓
- **Comparaison à l'addition naïve** : $0,03 + 0,05 = 0,08$ — l'écart avec 0,0785 est exactement l'intersection 0,0015, comptée deux fois ✓
- **Formule** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ pour des événements indépendants.
- **Ordre de grandeur** : quand les probabilités sont **petites**, l'addition est une bonne approximation — l'erreur est du second ordre.

Réponse. $1 - 0,97 \times 0,95 = 0,0785$.

Correction de l'exercice 9 - Prise de décision

- **Sous l'hypothèse « équilibrée »** ($p = 0,5$) :

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0,5^{10} = 45 \times \frac{1}{1024} \approx 0,04395$$

— **Sous l'hypothèse « truquée »** ($p = 0,8$) :

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0,8^8 \times 0,2^2 = 45 \times 0,16777 \times 0,04 \approx 0,30199$$

— **Rapport de vraisemblance** : $\frac{0,30199}{0,04395} \approx 6,87$.

— **Conclusion** : l'hypothèse « truquée » est environ **7 fois** plus vraisemblable que « équilibrée ».

— **Contrôle des ordres de grandeur** : 8 piles sur 10 correspond exactement à l'espérance $10 \times 0,8 = 8$ de la pièce truquée, alors que la pièce équilibrée en attendrait 5 ✓

— **Prudence** : « plus vraisemblable » n'est pas « certain » — obtenir 8 piles avec une pièce équilibrée reste possible (environ 4,4 %).

— **Probabilité d'au moins 8 piles pour une pièce équilibrée** :

$$\frac{45 + 10 + 1}{1024} = \frac{56}{1024} \approx 0,05469 \text{ — tout juste au-dessus du seuil usuel de 5 \%}$$

— **Avec 9 piles**, le rapport passerait à $\frac{0,26844}{0,00977} \approx 27,5$ — la conclusion serait bien plus nette.

Réponse. « Truquée » : 0,302 contre 0,044, soit un rapport de 6,9.

Correction de l'exercice 10 - Indépendance conditionnelle

— **Intersection** : $P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,8 = 0,1$.

— **Test d'indépendance** : $P(A)P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 \neq 0,1$ — **pas** indépendants.

— **Sens de la dépendance** : $P_B(A) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 < 0,5 = P(A)$ — la réalisation de B défavorise A .

— **Complémentaire conditionnel** :

$$P_B(\bar{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

— **Contrôle direct** : $P(\bar{A} \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$, et $\frac{0,3}{0,4} = 0,75$ ✓

— **Les quatre cases** : 0,1, 0,4, 0,3, 0,2, de somme 1 ✓

— **Contrôle de la réunion** : $1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$ ✓

— **Remarque utile** : $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$ est toujours vrai — le complémentaire fonctionne à l'intérieur d'un conditionnement, ce qui n'est pas le cas de $P_{\bar{B}}(A)$, sans lien simple avec $P_B(A)$.

Réponse. Non indépendants ($0,1 \neq 0,2$) ; $P_B(\bar{A}) = 0,75$.

Correction de l'exercice 11 - Problème des anniversaires

— **Contraire** : tous les anniversaires sont **distincts**.

$$P(\text{tous distincts}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{356}{365}$$

— **Calcul** : ce produit de 10 facteurs vaut environ 0,88305.

— **Réponse** :

$$P \approx 1 - 0,88305 = 0,11695$$

- **Lecture** : environ 11,7 % — bien plus que l'intuition ne le suggère pour seulement 10 personnes.
- **Contrôle du raisonnement** : il y a $\binom{10}{2} = 45$ paires, chacune coïncidant avec la probabilité $\frac{1}{365} \approx 0,00274$; l'approximation $45 \times 0,00274 \approx 0,1233$ est proche de 0,117 ✓
- **Seuil célèbre** : à 23 personnes, la probabilité dépasse 0,5 (elle vaut environ 0,5073).
- **À 50 personnes** : environ 0,97 ; à 60, plus de 0,99.
- **Méthode** : comme toujours pour « au moins deux », c'est le **contraire** (« tous différents ») qui se calcule facilement.

Réponse. $P \approx 0,117$.

Correction de l'exercice 12 - Épreuves jusqu'au premier succès

- **Exactement 4 lancers** : trois faces puis un pile.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

- **Au plus 4 lancers** — par le contraire (« les 4 premiers sont face ») :

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

- **Contrôle par la somme** : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$ ✓
- **Loi géométrique** : $P(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, de somme totale $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} = 1$ ✓
- **Espérance** : $\frac{1}{0,5} = 2$ lancers en moyenne.
- **Contrôle** : $\sum k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$ — résultat classique ✓
- **Propriété d'absence de mémoire** : après trois faces, la probabilité de réussir au lancer suivant reste $\frac{1}{2}$ — la pièce « n'a pas de mémoire », contrairement à ce que suggère l'illusion du joueur.

Réponse. $\frac{1}{16} = 0,0625$ et $\frac{15}{16} = 0,9375$.

Correction de l'exercice 13 - Probabilité d'un chemin long

- **Sans erreur** : quatre bons choix indépendants.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

- **Exactement une erreur** : il y a $\binom{4}{1} = 4$ positions possibles pour l'erreur, chacune de probabilité $\frac{1}{16}$.

$$P = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

- **Au plus une erreur** :

$$0,0625 + 0,25 = 0,3125$$

- **Contrôle par la loi binomiale** : le nombre d'erreurs suit $B(4; 0,5)$, de coefficients 1, 4, 6, 4, 1 sur 16.

- **Somme** : $\frac{1+4+6+4+1}{16} = 1 \checkmark$
- **Au plus une erreur** : $\frac{1+4}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125 \checkmark$
- **Espérance du nombre d'erreurs** : $4 \times 0,5 = 2$.
- **Lecture** : le cas le plus probable est 2 erreurs ($\frac{6}{16} = 0,375$) — sortir du premier coup est rare.

Réponse. $\frac{1}{16} = 0,0625$ sans erreur ; $\frac{5}{16} = 0,3125$ avec au plus une.

Correction de l'exercice 14 - Comparaison de deux stratégies

Premier pari.

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} \approx 1 - 0,48225 = 0,51775$$

Second pari. La probabilité d'un double 6 à un lancer vaut $\frac{1}{36}$, donc

$$P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0,50860 = 0,49140$$

- **Conclusion** : le **premier** pari est favorable (51,8 %), le second légèrement défavorable (49,1 %).
- **Contexte historique** : c'est le « problème du chevalier de Méré », soumis à Pascal en 1654 — l'un des actes de naissance du calcul des probabilités.
- **Pourquoi l'intuition échoue** : le chevalier raisonnait par proportionnalité ($4 \times \frac{1}{6} = \frac{24}{36}$), mais $1 - q^n$ n'est **pas** proportionnel à n .
- **Contrôle** : $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,48225$ et $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,50860 \checkmark$
- **Nombre de lancers pour équilibrer le second pari** : $\left(\frac{35}{36}\right)^n < 0,5$ donne $n > 24,6$, donc **25 lancers** suffiraient à le rendre favorable ($P \approx 0,5055$).

Réponse. Le premier (0,518 contre 0,491) — problème du chevalier de Méré.

Correction de l'exercice 15 - Fiabilité et redondance

- **Fiabilité en parallèle** : $1 - 0,1^n$.
- **Condition** : $1 - 0,1^n \geq 0,9999$, soit $0,1^n \leq 10^{-4}$.
- **Résolution** : $10^{-n} \leq 10^{-4}$ donne

$$n \geq 4$$
- **Vérifications** : avec 3 composants, $1 - 10^{-3} = 0,999 < 0,9999 \checkmark$ (insuffisant) ; avec 4, $1 - 10^{-4} = 0,9999 \checkmark$ — la borne est atteinte exactement.
- **Réponse** : **4 composants**.
- **Progression** : 1 composant 0,9 ; 2 → 0,99 ; 3 → 0,999 ; 4 → 0,9999 — chaque ajout gagne un **neuf** supplémentaire.
- **Coût de la fiabilité** : passer de 0,9 à 0,9999 demande de quadrupler le matériel, pour une amélioration de seulement 0,0999 en valeur absolue — mais une division par 1000 du **risque de panne**, ce qui est la bonne façon de lire ce gain.
- **En série au contraire** : 4 composants donneraient $0,9^4 = 0,6561$ — la fiabilité s'effondre.

Réponse. 4 composants ($1 - 10^{-4} = 0,9999$).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : contrôle et décision

a) **Aucune défectueuse :**

$$0,95^{20} \approx 0,35849$$

b) **Lot à $p = 0,05$.** Avec $X \sim B(20; 0,05)$:

- $P(X = 0) \approx 0,35849$;
 - $P(X = 1) = 20 \times 0,05 \times 0,95^{19} = 0,95^{19} \approx 0,37735$.
- $$P(X \leq 1) \approx 0,73584$$

Lot à $p = 0,20$. Avec $X \sim B(20; 0,20)$:

- $P(X = 0) = 0,8^{20} \approx 0,011529$;
 - $P(X = 1) = 20 \times 0,2 \times 0,8^{19} = 4 \times 0,014412 \approx 0,057646$.
- $$P(X \leq 1) \approx 0,069175$$

c) **Commentaire.**

- **Risque du producteur** : un bon lot ($p = 0,05$) est rejeté dans $1 - 0,736 = 26,4\%$ des cas — c'est beaucoup.
- **Risque du client** : un mauvais lot ($p = 0,20$) est accepté dans $6,9\%$ des cas — c'est acceptable.
- **Conclusion** : le contrôle est **sévère**. Il protège bien le client mais pénalise le producteur.
- **Piste d'amélioration** : accepter jusqu'à deux défectueuses ferait passer l'acceptation à $0,9245$ pour $p = 0,05$ (risque producteur ramené à $7,6\%$) mais à $0,2061$ pour $p = 0,20$ — le risque client triplerait.
- **Le vrai levier** : augmenter la **taille de l'échantillon**, qui seule permet de réduire les deux risques simultanément.
- **Contrôle** : $E(X) = 1$ pour $p = 0,05$ et $E(X) = 4$ pour $p = 0,20$ — le seuil « au plus une » est placé exactement sur l'espérance du bon lot, d'où sa sévérité ✓

Réponse. a) $\approx 0,358$ · b) $\approx 0,736$ et $\approx 0,069$ · c) contrôle sévère (risque producteur $26,4\%$).