

Plaquette 4 – Tableaux croisés, arbres pondérés et probabilités totales

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle. Pour $P(B) \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est la proportion de A à l'intérieur de B .

Formule du produit.

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)$$

Tableau croisé. Les effectifs (ou fréquences) des quatre cases $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, avec les marges.

! ·	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Arbre pondéré. Premier niveau : les $P(B_i)$. Niveaux suivants : des probabilités **conditionnelles**. La probabilité d'un chemin est le **produit** des branches, et la somme des branches d'un même nœud vaut 1.

Formule des probabilités totales. Si $B_1, \dots, B_n$ forment une **partition** :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \times P_{B_i}(A)$$

Cas à deux branches :

$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$$

Réunion. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Complémentaire. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, et aussi $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$.

Piège central. $P_B(A) \neq P_{\bar{B}}(A)$ en général — les deux quotients ont le **même numérateur** mais des dénominateurs différents.

Correction de l'exercice 1 – Lecture d'un tableau

Tableau des effectifs.

! ·	Lunettes	Sans	Total
Femmes	100	140	240
Hommes	60	100	160
Total	160	240	400

a) **Probabilité simple :**

$$P(L) = \frac{160}{400} = 0,4$$

b) **Conditionnelle :**

$$P_F(L) = \frac{100}{240} \approx 0,41667$$

- **Contrôle des marges** : $100 + 140 = 240 \checkmark$; $60 + 100 = 160 \checkmark$; $100 + 60 = 160 \checkmark$
- **Comparaison** : $P_F(L) \approx 0,417 > P(L) = 0,4$ — les femmes portent un peu plus de lunettes que la moyenne.
- **Côté hommes** : $P_H(L) = \frac{60}{160} = 0,375 < 0,4 \checkmark$ — cohérent.
- **Indépendance ?** $P(F) \times P(L) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$, alors que $P(F \cap L) = \frac{100}{400} = 0,25$ — pas indépendants.
- **Effectif d'indépendance** : il aurait fallu 96 femmes à lunettes au lieu de 100.

Réponse. a) $P(L) = 0,4$ · b) $P_F(L) \approx 0,417$.

Correction de l'exercice 2 - Renverser le conditionnement

- **Lecture directe dans le tableau** : sur les 160 porteurs de lunettes, 100 sont des femmes.

$$P_L(F) = \frac{100}{160} = 0,625$$

- **Par la formule** : $P_L(F) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625 \checkmark$
- **Contrôle** : $P_L(H) = \frac{60}{160} = 0,375$, et $0,625 + 0,375 = 1 \checkmark$
- **Comparaison essentielle** : $P_L(F) = 0,625$ alors que $P_F(L) \approx 0,417$ — **deux nombres très différents**, issus du même effectif 100.
- **Explication** : $P_F(L)$ divise par 240 (les femmes) tandis que $P_L(F)$ divise par 160 (les porteurs de lunettes).
- **Lecture** : $P_L(F) = 0,625 > P(F) = 0,6$ — savoir qu'une personne porte des lunettes rend un peu plus probable que ce soit une femme, cohérent avec la dépendance observée $\checkmark$

Réponse. $P_L(F) = 0,625$.

Correction de l'exercice 3 - Construire un arbre

- **Premier niveau** : $P(R_1) = \frac{5}{8}$ et $P(B_1) = \frac{3}{8}$.
- **Branches conditionnelles** : $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$ (il reste 4 rouges sur 7) et $P_{B_1}(R_2) = \frac{5}{7}$.
- **Probabilités totales** :

$$P(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

- **Résultat remarquable** : $P(R_2) = P(R_1) = \frac{5}{8} = 0,625$!
- **Explication** : par symétrie, avant tout tirage, le second jeton a exactement la même probabilité d'être rouge que le premier — l'ordre des tirages n'y change rien.
- **Contrôle** : $P(B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{15+6}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8} \checkmark$, et $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1 \checkmark$

- **Attention** : la **conditionnelle** $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \approx 0,571$ est bien différente de $P(R_2) = 0,625$ — les tirages ne sont **pas** indépendants.

Réponse. $P(R_2) = \frac{5}{8} = 0,625$, comme $P(R_1)$.

Correction de l'exercice 4 - Probabilités totales à trois branches

- **Notations** : F_1, F_2, F_3 et D « composant défaillant ».
- **Probabilités totales** :

$$P(D) = 0,20 \times 0,04 + 0,45 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02$$
- **Calcul** : $0,008 + 0,0045 + 0,007 = 0,0195$.
- **Taux global** : 1,95 %.
- **Contrôle** : la somme des poids vaut $0,20 + 0,45 + 0,35 = 1$ ✓
- **Encadrement** : le taux global est compris entre le meilleur (1 %) et le pire (4 %) fournisseur ✓
- **Contribution de chacun aux pannes** : $\frac{0,008}{0,0195} \approx 41,0\%$ pour F_1 , $\frac{0,0045}{0,0195} \approx 23,1\%$ pour F_2 et $\frac{0,007}{0,0195} \approx 35,9\%$ pour F_3 .
- **Lecture industrielle** : F_1 ne fournit que 20 % des pièces mais cause 41 % des pannes — c'est lui qu'il faut renégocier en priorité.

Réponse. $P(D) = 0,0195$, soit 1,95 %.

Correction de l'exercice 5 - Probabilité d'une intersection

- **Formule du produit** :

$$P(A \cap B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$
- **Complémentaire conditionnel** : $P_A(\overline{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$, donc

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$
- **Contrôle** : $0,18 + 0,42 = 0,6 = P(A)$ ✓ — les deux morceaux reconstituent A .
- **Interprétation** : parmi les 60 % de cas où A se produit, 30 % voient aussi B , soit 18 % du total.
- **Erreur fréquente** : écrire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ — cette formule n'est valable que si les événements sont **indépendants**, ce qui n'est pas donné ici.
- **Ce que l'on ne peut pas calculer** : $P(B)$ reste **inconnu**, car on ignore ce qui se passe dans $\overline{A}$.
- **Encadrement de $P(B)$** : il est au moins 0,18 (l'intersection) et au plus $0,18 + 0,4 = 0,58$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0,18$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,42$.

Correction de l'exercice 6 - Compléter un tableau

- **Intersection** : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,65 = 0,15$.
- **Les quatre cases** :
 $P(A \cap B) = 0,15$;
 $P(A \cap \overline{B}) = 0,5 - 0,15 = 0,35$;
 $P(\overline{A} \cap B) = 0,3 - 0,15 = 0,15$;

- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,65 = 0,35$.
- **Contrôle** : $0,15 + 0,35 + 0,15 + 0,35 = 1$ ✓
- **Conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

- **Indépendance** : $P_B(A) = 0,5 = P(A)$, donc A et B sont **indépendants** ✓
- **Contrôle** : $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15 = P(A \cap B)$ ✓
- **Autre conditionnelle** : $P_A(B) = \frac{0,15}{0,5} = 0,3 = P(B)$ ✓ — l'indépendance se lit dans les deux sens.

Réponse. $P(A \cap B) = 0,15$ et $P_B(A) = 0,5$: événements indépendants.

Correction de l'exercice 7 - Test de dépistage simple

- **Notations** : M « malade », T « test positif ».
- **Données** : $P(M) = 0,05$, $P_M(T) = 0,9$, $P_{\bar{M}}(T) = 0,1$.
- **Probabilités totales** :

$$P(T) = 0,05 \times 0,9 + 0,95 \times 0,1 = 0,045 + 0,095 = 0,14$$
- **Résultat** : 14 % des tests sont positifs.
- **Décomposition** : 0,045 de **vrais positifs** et 0,095 de **faux positifs**.
- **Observation importante** : les faux positifs sont **deux fois plus nombreux** que les vrais, parce que les non-malades sont 19 fois plus nombreux ✓
- **Valeur prédictive positive** : $P_T(M) = \frac{0,045}{0,14} \approx 0,32143$ — moins d'un tiers des positifs sont malades.
- **Contrôle** : $P_T(\bar{M}) = \frac{0,095}{0,14} \approx 0,67857$, et la somme vaut 1 ✓
- **Côté négatif** : $P_T(\bar{M}) = \frac{0,95 \times 0,9}{0,86} = \frac{0,855}{0,86} \approx 0,99419$ — un test négatif est très fiable.

Réponse. $P(T) = 0,14$.

Correction de l'exercice 8 - Arbre à deux étapes

- **Notations** : B « prend le bus », R « en retard ».
- **Probabilités totales** :

$$P(R) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,05 = 0,14 + 0,015 = 0,155$$
- **Résultat** : 15,5 % de jours de retard.
- **Contrôle** : $P(\bar{R}) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,95 = 0,56 + 0,285 = 0,845$, et $0,155 + 0,845 = 1$ ✓
- **Renversement** : $P_R(B) = \frac{0,14}{0,155} \approx 0,90323$ — s'il est en retard, il y a plus de 90 % de chances qu'il ait pris le bus.
- **Lecture** : le bus est **quatre fois** plus risqué, et il l'utilise la majorité du temps — d'où cette écrasante probabilité a posteriori.
- **Sur une année scolaire** (180 jours) : environ $0,155 \times 180 \approx 28$ retards attendus.
- **Effet d'un changement** : en venant toujours à pied, il n'aurait plus que $0,05 \times 180 = 9$ retards.

Réponse. $P(R) = 0,155$.

Correction de l'exercice 9 - Indépendance à tester

- **Probabilités** : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
- **Intersection** : il y a **un seul** roi de cœur, donc $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
- **Test** : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} \checkmark$
- **Conclusion** : les événements sont **indépendants**.
- **Lecture** : $P_A(B) = \frac{1/32}{1/4} = \frac{1}{8} = P(B)$ — savoir que la carte est un cœur ne change rien à la probabilité que ce soit un roi, puisque chaque couleur contient exactement **un** roi.
- **Contre-exemple instructif** : si l'on retirait le roi de cœur du jeu (31 cartes), on aurait $P(A) = \frac{7}{31}$, $P(B) = \frac{3}{31}$ et $P(A \cap B) = 0$ — les événements deviendraient **incompatibles**, donc dépendants.
- **Généralisation** : dans tout jeu « rectangulaire » (couleurs $\times$ valeurs), couleur et valeur sont toujours indépendantes $\checkmark$

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A)P(B)$.

Correction de l'exercice 10 - Probabilité conditionnelle et réunion

- **Probabilités totales** :

$$P(B) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times 0,5 = 0,1 + 0,3 = 0,4$$
- **Intersection** : $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$.
- **Réunion** :

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,4 - 0,1 = 0,7$$
- **Contrôle par les quatre cases** : $A \cap B = 0,1$; $A \cap \bar{B} = 0,3$; $\bar{A} \cap B = 0,3$; $\bar{A} \cap \bar{B} = 0,3$.
- **Somme** : $0,1 + 0,3 + 0,3 + 0,3 = 1 \checkmark$
- **Contrôle de la réunion** : $1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7 \checkmark$
- **Indépendance ?** $P(A)P(B) = 0,16 \neq 0,1$ — **pas** indépendants.
- **Sens de la dépendance** : $P_A(B) = 0,25 < P(B) = 0,4$ — la réalisation de A **défavorise** B .
- **Renversement** : $P_B(A) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 < P(A) = 0,4 \checkmark$ — la dépendance négative se lit dans les deux sens.

Réponse. $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

Correction de l'exercice 11 - Deux tirages avec remise

- **Indépendance** : avec remise, les deux tirages sont **indépendants**, avec $P(B) = 0,4$ à chaque fois.
- **Deux chemins** : blanche puis noire, ou noire puis blanche.

$$P = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,24 + 0,24 = 0,48$$
- **Contrôle par la loi complète** : deux blanches 0,16 ; deux noires 0,36 ; une blanche 0,48.
- **Somme** : $0,16 + 0,36 + 0,48 = 1 \checkmark$
- **Comparaison avec le tirage sans remise** : on aurait $2 \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{48}{90} \approx 0,5333$ — un peu **plus**, car sans remise le second tirage favorise l'autre couleur.

- **Lien avec la loi binomiale** : le nombre de blanches suit $B(2; 0,4)$, et

$$P(X = 1) = \binom{2}{1} 0,4 \times 0,6 = 0,48 \quad \checkmark$$

- **Espérance** : $2 \times 0,4 = 0,8$ blanche en moyenne.

Réponse. $P = 0,48$.

Correction de l'exercice 12 - Trois tirages successifs

- **Chemin unique** : verte, verte, verte.

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0,1$$

- **Contrôle par les combinaisons** : $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10} \quad \checkmark$

- **Détail des branches** : après deux vertes tirées, il reste 1 verte et 2 rouges, d'où $\frac{1}{3} \quad \checkmark$

- **Probabilité contraire** : « au moins une rouge » vaut $1 - 0,1 = 0,9$.

- **Autre calcul de contrôle** : les tirages de trois boules parmi cinq sont au nombre de $\binom{5}{3} = 10$, et un seul ne contient que des vertes $\checkmark$

- **Probabilité d'exactly une rouge** : $\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{10} = \frac{3 \times 2}{10} = 0,6$.

- **Probabilité de deux rouges** : $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{10} = \frac{3}{10} = 0,3$.

- **Contrôle global** : $0,1 + 0,6 + 0,3 = 1 \quad \checkmark$

Réponse. $P = \frac{1}{10} = 0,1$.

Correction de l'exercice 13 - Recherche d'une probabilité inconnue

- **Notations** : S « sportif », A « satisfait », et l'inconnue $x = P_{\overline{S}}(A)$.

- **Probabilités totales** :

$$0,62 = 0,6 \times 0,8 + 0,4x = 0,48 + 0,4x$$

- **Résolution** : $0,4x = 0,14$, donc

$$x = 0,35$$

- **Réponse** : 35 % des non-sportifs sont satisfaits.

- **Vérification** : $0,48 + 0,4 \times 0,35 = 0,48 + 0,14 = 0,62 \quad \checkmark$

- **Lecture** : les sportifs sont **beaucoup** plus satisfaits (80 % contre 35 %).

- **Renversement** : $P_A(S) = \frac{0,48}{0,62} \approx 0,77419$ — plus des trois quarts des satisfaits sont sportifs, alors qu'ils ne sont que 60 % de la classe.

- **Côté insatisfaits** : $P_{\overline{A}}(S) = \frac{0,6 \times 0,2}{0,38} = \frac{0,12}{0,38} \approx 0,31579 \quad \checkmark$

- **Contrôle global** : $0,62 \times 0,77419 + 0,38 \times 0,31579 = 0,48 + 0,12 = 0,6 = P(S) \quad \checkmark$

Réponse. 35 % des non-sportifs sont satisfaits.

Correction de l'exercice 14 - Arbre à trois niveaux

— **Premier niveau** : $P(A) = P(B) = 0,5$.

— **Branches** : $P_A(R) = \frac{3}{4} = 0,75$ et $P_B(R) = \frac{1}{4} = 0,25$.

— **Probabilités totales** :

$$P(R) = 0,5 \times 0,75 + 0,5 \times 0,25 = 0,375 + 0,125 = 0,5$$

— **Renversement** :

$$P_R(A) = \frac{0,375}{0,5} = 0,75$$

— **Contrôle** : $P_R(B) = \frac{0,125}{0,5} = 0,25$, et la somme vaut 1 ✓

— **Lecture** : la boule rouge fait passer l'urne A de 50 % à 75 % — elle est trois fois plus « riche » en rouges.

— **Symétrie remarquable** : $P_R(A) = P_A(R) = 0,75$ ici. C'est une **coïncidence** due à $P(A) = P(R) = 0,5$ — en général ces deux nombres diffèrent.

— **Vérification de la symétrie globale** : $P(R) = 0,5$ par symétrie des deux urnes (l'une est le « miroir » de l'autre) ✓

Réponse. $P(R) = 0,5$ et $P_R(A) = 0,75$.

Correction de l'exercice 15 - Événements incompatibles

— **Incompatibilité** : $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

— **Réunion** :

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,45 = 0,75$$

— **Conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{0}{0,45} = 0$$

— **Complémentaire de la réunion** :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

— **Interprétation de $P_B(A) = 0$** : si B se réalise, A est **impossible** — c'est une dépendance **maximale**.

— **Non-indépendance** : $P(A)P(B) = 0,135 \neq 0$ ✓ — des événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.

— **Contrôle** : $P_A(B) = 0$ également, par symétrie ✓

— **Attention au vocabulaire** : « incompatibles » (ils ne peuvent pas se produire ensemble) et « indépendants » (l'un ne renseigne pas sur l'autre) sont deux notions **opposées**, souvent confondues.

Réponse. $P(A \cup B) = 0,75$, $P_B(A) = 0$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,25$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : contrôle qualité en deux étapes

a) **Probabilité de rejet.** Avec D « défectueuse » et R « rejetée » :

$$P(R) = 0,06 \times 0,95 + 0,94 \times 0,03 = 0,057 + 0,0282 = 0,0852$$

— Soit 8,52 % de rejets.

b) **Valeur prédictive du rejet** :

$$P_R(D) = \frac{0,057}{0,0852} \approx 0,66901$$

— Environ 66,9 % des pièces rejetées sont réellement défectueuses.

— **Contrôle** : $P_R(\bar{D}) = \frac{0,0282}{0,0852} \approx 0,33099$, de somme 1 ✓

c) **Pièces acceptées**. $P(\bar{R}) = 1 - 0,0852 = 0,9148$, et

$$P(D \cap \bar{R}) = 0,06 \times 0,05 = 0,003$$

$$P_{\bar{R}}(D) = \frac{0,003}{0,9148} \approx 0,00328$$

— Seulement 0,33 % des pièces acceptées sont défectueuses.

— **Contrôle global** :

$$0,0852 \times 0,66901 + 0,9148 \times 0,00328 = 0,057 + 0,003 = 0,06 = P(D) \quad \checkmark$$

— **Bilan du contrôle** : le taux de défauts passe de 6 % à 0,33 % après contrôle — une division par **18**.

— **Coût du contrôle** : 2,82 % de bonnes pièces sont rejetées à tort, soit $\frac{0,0282}{0,94} = 3\%$ des bonnes pièces ✓ — c'est le prix de la sécurité.

Réponse. a) $0,0852 \cdot$ b) $\approx 0,669 \cdot$ c) $\approx 0,0033$.