Plaquette 4 – Tableaux croisés, arbres pondérés et probabilités totales

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle. Pour $P(B) \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est la proportion de A **à l'intérieur** de B.

Formule du produit.

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)$$

Tableau croisé. Les effectifs (ou fréquences) des quatre cases $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, avec les marges.

! ·	B	$\overline{B}$	**Total**
A	$P(A \cap B)$	$P\left(A \cap \overline{B}\right)$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P\left(\overline{A} \cap B\right)$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{A}\right)$
Total	$P(B)$	$P\left(\overline{B}\right)$	1

Arbre pondéré. Premier niveau : les $P(B_i)$. Niveaux suivants : des probabilités **conditionnelles**. La probabilité d'un chemin est le **produit** des branches, et la somme des branches d'un même nœud vaut 1.

Formule des probabilités totales. Si $B_1, \ldots, B_n$ forment une **partition** :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P_{B_i}(A)$$

Cas à deux branches :

$$P(A) = P(B)P_B(A) + P\left(\overline{B}\right)P_{\overline{B}}(A)$$

Réunion. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Complémentaire. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$, et aussi $P_B\left(\overline{A}\right) = 1 - P_B(A)$.

Piège central. $P_B(A) \neq P_A(B)$ en général — les deux quotients ont le **même numérateur** mais des dénominateurs différents.

Correction de l'exercice 1 – Lecture d'un tableau

Tableau des effectifs.

! ·	**Lunettes**	**Sans**	**Total**
Femmes	100	140	240
Hommes	60	100	160
Total	160	240	400

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) **Probabilité simple** :

$$P(L) = \frac{160}{400} = 0{,}4$$

b) **Conditionnelle** :

$$P_F(L) = \frac{100}{240} \approx 0{,}41667$$

— **Contrôle des marges** : $100 + 140 = 240$ ✓ ; $60 + 100 = 160$ ✓ ; $100 + 60 = 160$ ✓
— **Comparaison** : $P_F(L) \approx 0{,}417 > P(L) = 0{,}4$ — les femmes portent un peu plus de lunettes que la moyenne.
— **Côté hommes** : $P_H(L) = \frac{60}{160} = 0{,}375 < 0{,}4$ ✓ — cohérent.
— **Indépendance ?** $P(F) \times P(L) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$, alors que $P(F \cap L) = \frac{100}{400} = 0{,}25$ — **pas** indépendants.
— **Effectif d'indépendance** : il aurait fallu 96 femmes à lunettes au lieu de 100.

Réponse. a) $P(L) = 0{,}4$ · b) $P_F(L) \approx 0{,}417$.

Correction de l'exercice 2 – Renverser le conditionnement

— **Lecture directe dans le tableau** : sur les 160 porteurs de lunettes, 100 sont des femmes.

$$P_L(F) = \frac{100}{160} = 0{,}625$$

— **Par la formule** : $P_L(F) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}25}{0{,}4} = 0{,}625$ ✓
— **Contrôle** : $P_L(H) = \frac{60}{160} = 0{,}375$, et $0{,}625 + 0{,}375 = 1$ ✓
— **Comparaison essentielle** : $P_L(F) = 0{,}625$ alors que $P_F(L) \approx 0{,}417$ — **deux nombres très différents**, issus du même effectif 100.
— **Explication** : $P_F(L)$ divise par 240 (les femmes) tandis que $P_L(F)$ divise par 160 (les porteurs de lunettes).
— **Lecture** : $P_L(F) = 0{,}625 > P(F) = 0{,}6$ — savoir qu'une personne porte des lunettes rend un peu plus probable que ce soit une femme, cohérent avec la dépendance observée ✓

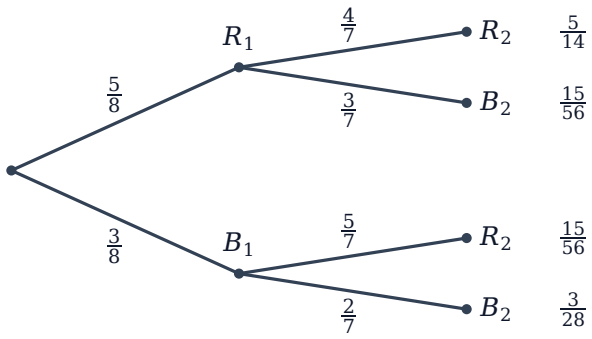
Réponse. $P_L(F) = 0{,}625$.

Correction de l'exercice 3 – Construire un arbre

— **Premier niveau** : $P(R_1) = \frac{5}{8}$ et $P(B_1) = \frac{3}{8}$.
— **Branches conditionnelles** : $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$ (il reste 4 rouges sur 7) et $P_{B_1}(R_2) = \frac{5}{7}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Deux tirages sans remise (5 rouges, 3 bleus)

— **Probabilités totales** :

$$P(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

— **Résultat remarquable** : $P(R_2) = P(R_1) = \frac{5}{8} = 0{,}625$!

— **Explication** : par symétrie, avant tout tirage, le second jeton a exactement la même probabilité d'être rouge que le premier — l'ordre des tirages n'y change rien.

— **Contrôle** : $P(B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{15+6}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$ ✓, et $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$ ✓

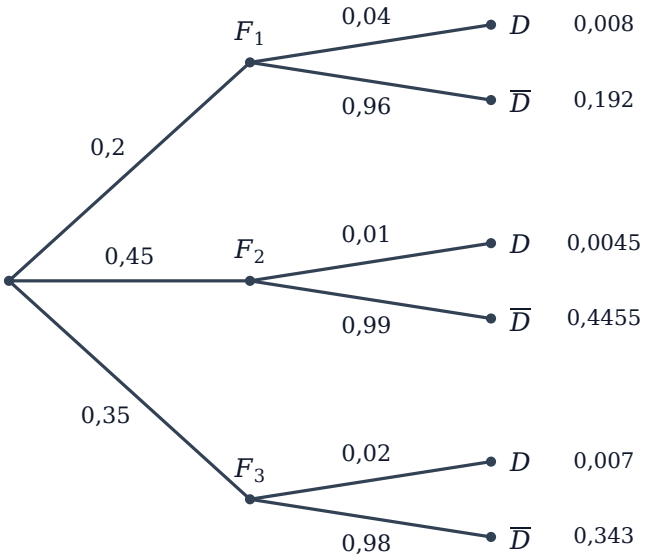
— **Attention** : la **conditionnelle** $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \approx 0{,}571$ est bien différente de $P(R_2) = 0{,}625$ — les tirages ne sont **pas** indépendants.

Réponse. $P(R_2) = \frac{5}{8} = 0{,}625$, comme $P(R_1)$.

Correction de l'exercice 4 – Probabilités totales à trois branches

— **Notations** : F_1, F_2, F_3 et D « composant défaillant ».

Arbre pondéré de la situation :



Fournisseur puis panne

— **Probabilités totales** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(D) = 0{,}20 \times 0{,}04 + 0{,}45 \times 0{,}01 + 0{,}35 \times 0{,}02$$

— **Calcul** : $0{,}008 + 0{,}0045 + 0{,}007 = 0{,}0195$.
— **Taux global** : 1,95 %.
— **Contrôle** : la somme des poids vaut $0{,}20 + 0{,}45 + 0{,}35 = 1$ ✓
— **Encadrement** : le taux global est compris entre le meilleur (1 %) et le pire (4 %) fournisseur ✓
— **Contribution de chacun aux pannes** : $\frac{0{,}008}{0{,}0195} \approx 41{,}0\,\%$ pour F_1, $\frac{0{,}0045}{0{,}0195} \approx 23{,}1\,\%$ pour F_2 et $\frac{0{,}007}{0{,}0195} \approx 35{,}9\,\%$ pour F_3.
— **Lecture industrielle** : F_1 ne fournit que 20 % des pièces mais cause 41 % des pannes — c'est lui qu'il faut renégocier en priorité.

Réponse. $P(D) = 0{,}0195$, soit 1,95 %.

Correction de l'exercice 5 – Probabilité d'une intersection

— **Formule du produit** :

$$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$$

— **Complémentaire conditionnel** : $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, donc

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$$

— **Contrôle** : $0{,}18 + 0{,}42 = 0{,}6 = P(A)$ ✓ — les deux morceaux reconstituent A.
— **Interprétation** : parmi les 60 % de cas où A se produit, 30 % voient aussi B, soit 18 % du total.
— **Erreur fréquente** : écrire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ — cette formule n'est valable que si les événements sont **indépendants**, ce qui n'est pas donné ici.
— **Ce que l'on ne peut pas calculer** : $P(B)$ reste **inconnu**, car on ignore ce qui se passe dans $\overline{A}$.
— **Encadrement de** $P(B)$: il est au moins 0,18 (l'intersection) et au plus $0{,}18 + 0{,}4 = 0{,}58$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}18$ et $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}42$.

Correction de l'exercice 6 – Compléter un tableau

— **Intersection** : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}65 = 0{,}15$.
— **Les quatre cases** :
— $P(A \cap B) = 0{,}15$;
— $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$;
— $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}15$;
— $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.
— **Contrôle** : $0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}15 + 0{,}35 = 1$ ✓
— **Conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$$

— **Indépendance** : $P_B(A) = 0{,}5 = P(A)$, donc A et B sont **indépendants** ✓
— **Contrôle** : $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15 = P(A \cap B)$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

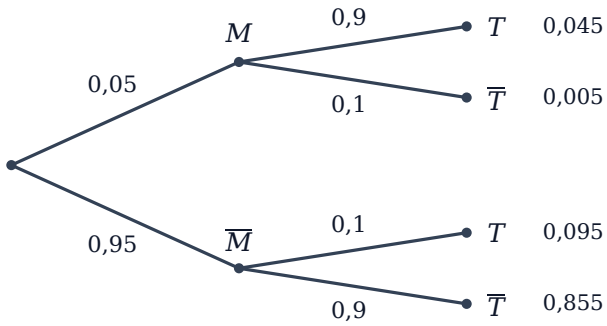
— **Autre conditionnelle** : $P_A(B) = \dfrac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3 = P(B)$ ✓ — l'indépendance se lit dans les deux sens.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}15$ et $P_B(A) = 0{,}5$: événements indépendants.

Correction de l'exercice 7 – Test de dépistage simple

— **Notations** : M « malade », T « test positif ».
— **Données** : $P(M) = 0{,}05$, $P_M(T) = 0{,}9$, $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}1$.

Arbre pondéré de la situation :



Arbre du dépistage

— **Probabilités totales** :

$$P(T) = 0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}95 \times 0{,}1 = 0{,}045 + 0{,}095 = 0{,}14$$

— **Résultat** : 14 % des tests sont positifs.
— **Décomposition** : 0,045 de **vrais positifs** et 0,095 de **faux positifs**.
— **Observation importante** : les faux positifs sont **deux fois plus nombreux** que les vrais, parce que les non-malades sont 19 fois plus nombreux ✓
— **Valeur prédictive positive** : $P_T(M) = \dfrac{0{,}045}{0{,}14} \approx 0{,}32143$ — moins d'un tiers des positifs sont malades.
— **Contrôle** : $P_T\left(\overline{M}\right) = \dfrac{0{,}095}{0{,}14} \approx 0{,}67857$, et la somme vaut 1 ✓
— **Côté négatif** : $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}9}{0{,}86} = \dfrac{0{,}855}{0{,}86} \approx 0{,}99419$ — un test négatif est très fiable.

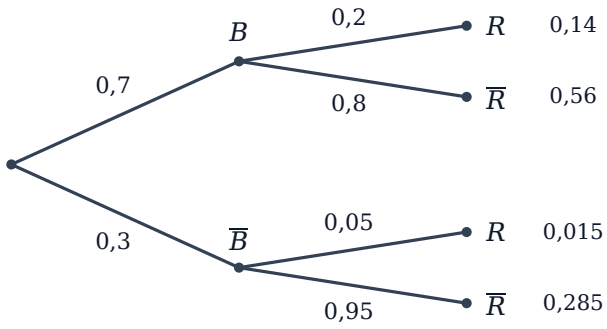
Réponse. $P(T) = 0{,}14$.

Correction de l'exercice 8 – Arbre à deux étapes

— **Notations** : B « prend le bus », R « en retard ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Bus (B) ou à pied, puis retard

— **Probabilités totales** :

$$P(R) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}14 + 0{,}015 = 0{,}155$$

— **Résultat** : 15,5 % de jours de retard.

— **Contrôle** : $P\left(\overline{R}\right) = 0{,}7 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}95 = 0{,}56 + 0{,}285 = 0{,}845$, et $0{,}155 + 0{,}845 = 1$ ✓

— **Renversement** : $P_R(B) = \dfrac{0{,}14}{0{,}155} \approx 0{,}90323$ — s'il est en retard, il y a plus de 90 % de chances qu'il ait pris le bus.

— **Lecture** : le bus est **quatre fois** plus risqué, et il l'utilise la majorité du temps — d'où cette écrasante probabilité a posteriori.

— **Sur une année scolaire** (180 jours) : environ $0{,}155 \times 180 \approx 28$ retards attendus.

— **Effet d'un changement** : en venant toujours à pied, il n'aurait plus que $0{,}05 \times 180 = 9$ retards.

Réponse. $P(R) = 0{,}155$.

Correction de l'exercice 9 – Indépendance à tester

— **Probabilités** : $P(A) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $P(B) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

— **Intersection** : il y a **un seul** roi de cœur, donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

— **Test** : $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{32}$ ✓

— **Conclusion** : les événements sont **indépendants**.

— **Lecture** : $P_A(B) = \dfrac{1/32}{1/4} = \dfrac{1}{8} = P(B)$ — savoir que la carte est un cœur ne change rien à la probabilité que ce soit un roi, puisque chaque couleur contient exactement **un** roi.

— **Contre-exemple instructif** : si l'on retirait le roi de cœur du jeu (31 cartes), on aurait $P(A) = \dfrac{7}{31}$, $P(B) = \dfrac{3}{31}$ et $P(A \cap B) = 0$ — les événements deviendraient **incompatibles**, donc dépendants.

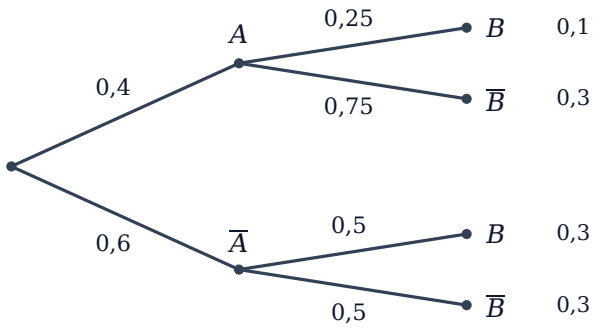
— **Généralisation** : dans tout jeu « rectangulaire » (couleurs × valeurs), couleur et valeur sont toujours indépendantes ✓

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32} = P(A)P(B)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Probabilité conditionnelle et réunion

Arbre pondéré de la situation :



Arbre de la situation

— **Probabilités totales** :

$$P(B) = 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$$

— **Intersection** : $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.

— **Réunion** :

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}7$$

— **Contrôle par les quatre cases** : $A \cap B = 0{,}1$; $A \cap \overline{B} = 0{,}3$; $\overline{A} \cap B = 0{,}3$; $\overline{A} \cap \overline{B} = 0{,}3$.

— **Somme** : $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 = 1$ ✓

— **Contrôle de la réunion** : $1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ ✓

— **Indépendance ?** $P(A)P(B) = 0{,}16 \neq 0{,}1$ — **pas** indépendants.

— **Sens de la dépendance** : $P_A(B) = 0{,}25 < P(B) = 0{,}4$ — la réalisation de A **défavorise** B.

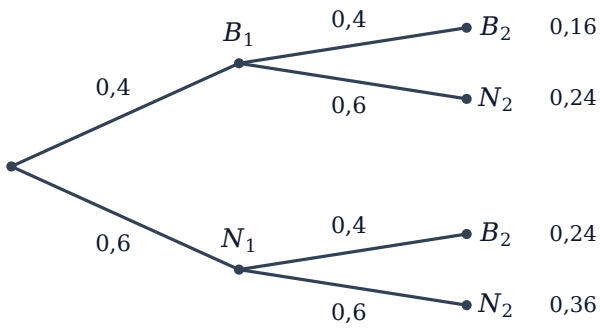
— **Renversement** : $P_B(A) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25 < P(A) = 0{,}4$ ✓ — la dépendance négative se lit dans les deux sens.

Réponse. $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$.

Correction de l’exercice 11 – Deux tirages avec remise

— **Indépendance** : avec remise, les deux tirages sont **indépendants**, avec $P(B) = 0{,}4$ à chaque fois.

Arbre pondéré de la situation :



Avec remise : mêmes branches au second tirage

— **Deux chemins** : blanche puis noire, ou noire puis blanche.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P = 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$$

— **Contrôle par la loi complète** : deux blanches 0,16 ; deux noires 0,36 ; une blanche 0,48.
— **Somme** : $0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}48 = 1$ ✓
— **Comparaison avec le tirage sans remise** : on aurait $2 \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{48}{90} \approx 0{,}5333$ — un peu **plus**, car sans remise le second tirage favorise l'autre couleur.
— **Lien avec la loi binomiale** : le nombre de blanches suit $B(2\,;0{,}4)$, et $P(X = 1) = \binom{2}{1} 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}48$ ✓
— **Espérance** : $2 \times 0{,}4 = 0{,}8$ blanche en moyenne.

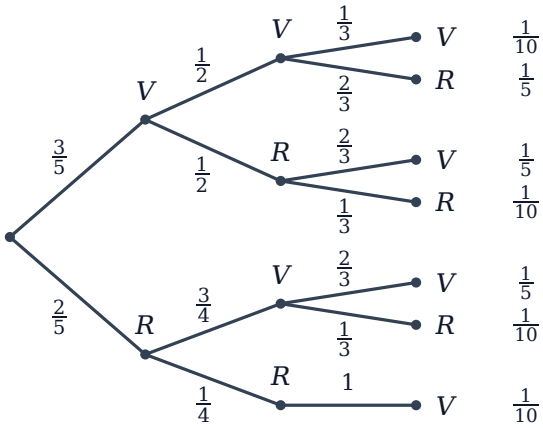
Réponse. $P = 0{,}48$.

Correction de l'exercice 12 – Trois tirages successifs

— **Chemin unique** : verte, verte, verte.

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Arbre complet des trois tirages (probabilité de chaque chemin au bout) :



Trois tirages sans remise (3 vertes, 2 rouges)

— **Détail des branches** : après deux vertes tirées, il reste 1 verte et 2 rouges, d'où $\frac{1}{3}$ ✓
— **Probabilité contraire** : « au moins une rouge » vaut $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.
— **Probabilité d'exactement une rouge** : trois chemins (VVR, VRV, RVV), chacun de probabilité $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$, soit $3 \times \frac{1}{5} = 0{,}6$.
— **Probabilité de deux rouges** : trois chemins (VRR, RVR, RRV), chacun de probabilité $\frac{1}{10}$, soit 0,3. Après deux rouges, il ne reste que des vertes : la branche vaut 1.
— **Contrôle global** : $0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}3 = 1$ ✓

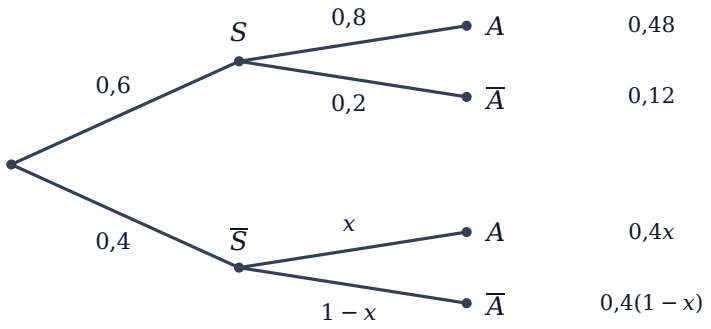
Réponse. $P = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Correction de l'exercice 13 – Recherche d'une probabilité inconnue

— **Notations** : S « sportif », A « satisfait », et l'inconnue $x = P_{\overline{S}}(A)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré, avec l'inconnue sur sa branche :



L'inconnue x sur une branche

— **Probabilités totales** :

$$0{,}62 = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4x = 0{,}48 + 0{,}4x$$

— **Résolution** : $0{,}4x = 0{,}14$, donc

$$x = 0{,}35$$

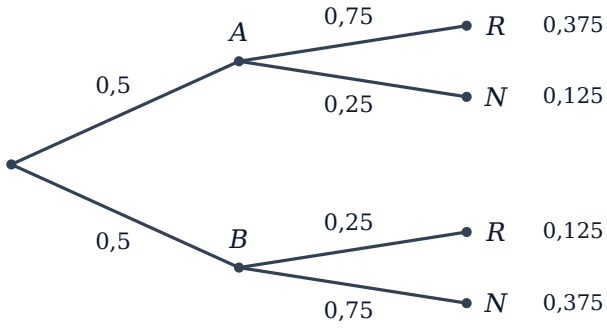
— **Réponse** : 35 % des non-sportifs sont satisfaits.
— **Vérification** : $0{,}48 + 0{,}4 \times 0{,}35 = 0{,}48 + 0{,}14 = 0{,}62$ ✓
— **Lecture** : les sportifs sont **beaucoup** plus satisfaits (80 % contre 35 %).
— **Renversement** : $P_A(S) = \dfrac{0{,}48}{0{,}62} \approx 0{,}77419$ — plus des trois quarts des satisfaits sont sportifs, alors qu'ils ne sont que 60 % de la classe.
— **Côté insatisfaits** : $P_{\overline{A}}(S) = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}38} = \dfrac{0{,}12}{0{,}38} \approx 0{,}31579$ ✓
— **Contrôle global** : $0{,}62 \times 0{,}77419 + 0{,}38 \times 0{,}31579 \approx 0{,}48 + 0{,}12 = 0{,}6 = P(S)$ ✓

Réponse. 35 % des non-sportifs sont satisfaits.

Correction de l'exercice 14 – Une pièce puis une urne

— **Premier niveau** : $P(A) = P(B) = 0{,}5$.
— **Branches** : $P_A(R) = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ et $P_B(R) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Arbre pondéré de la situation :



Pile : urne A ; face : urne B

— **Probabilités totales** :

$$P(R) = 0{,}5 \times 0{,}75 + 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5$$

— **Renversement** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P_R(A) = \frac{0{,}375}{0{,}5} = 0{,}75$$

— **Contrôle** : $P_R(B) = \dfrac{0{,}125}{0{,}5} = 0{,}25$, et la somme vaut 1 ✓

— **Lecture** : la boule rouge fait passer l'urne A de 50 % à 75 % — elle est trois fois plus « riche » en rouges.

— **Symétrie remarquable** : $P_R(A) = P_A(R) = 0{,}75$ ici. C'est une **coïncidence** due à $P(A) = P(R) = 0{,}5$ — en général ces deux nombres diffèrent.

— **Vérification de la symétrie globale** : $P(R) = 0{,}5$ par symétrie des deux urnes (l'une est le « miroir » de l'autre) ✓

Réponse. $P(R) = 0{,}5$ et $P_R(A) = 0{,}75$.

Correction de l'exercice 15 – Événements incompatibles

— **Incompatibilité** : $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cap B) = 0$.

— **Réunion** :

$$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}45 = 0{,}75$$

— **Conditionnelle** :

$$P_B(A) = \frac{0}{0{,}45} = 0$$

— **Complémentaire de la réunion** :

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

— **Interprétation de $P_B(A) = 0$** : si B se réalise, A est **impossible** — c'est une dépendance **maximale**.

— **Non-indépendance** : $P(A)P(B) = 0{,}135 \neq 0$ ✓ — des événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.

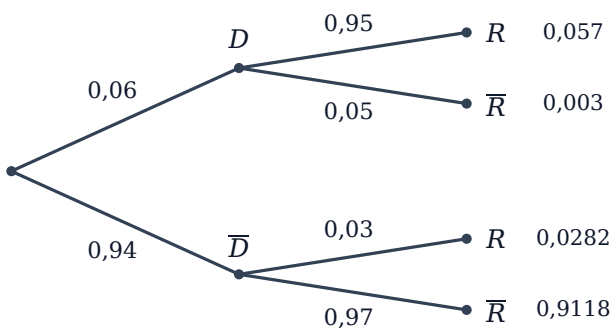
— **Contrôle** : $P_A(B) = 0$ également, par symétrie ✓

— **Attention au vocabulaire** : « incompatibles » (ils ne peuvent pas se produire ensemble) et « indépendants » (l'un ne renseigne pas sur l'autre) sont deux notions **opposées**, souvent confondues.

Réponse. $P(A \cup B) = 0{,}75$, $P_B(A) = 0$, $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}25$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : contrôle qualité en deux étapes

Arbre pondéré de la situation :



Arbre du premier contrôle

a) **Probabilité de rejet.** Avec D « défectueuse » et R « rejetée » :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(R) = 0{,}06 \times 0{,}95 + 0{,}94 \times 0{,}03 = 0{,}057 + 0{,}0282 = 0{,}0852$$

— Soit 8,52 % de rejets.

b) **Valeur prédictive du rejet** :

$$P_R(D) = \frac{0{,}057}{0{,}0852} \approx 0{,}66901$$

— Environ 66,9 % des pièces rejetées sont réellement défectueuses.

— **Contrôle** : $P_R\left(\overline{D}\right) = \frac{0{,}0282}{0{,}0852} \approx 0{,}33099$, de somme 1 ✓

c) **Pièces acceptées.** $P\left(\overline{R}\right) = 1 - 0{,}0852 = 0{,}9148$, et

$$P\left(D \cap \overline{R}\right) = 0{,}06 \times 0{,}05 = 0{,}003$$

$$P_{\overline{R}}(D) = \frac{0{,}003}{0{,}9148} \approx 0{,}00328$$

— Seulement 0,33 % des pièces acceptées sont défectueuses.

— **Contrôle global** :
$0{,}0852 \times 0{,}66901 + 0{,}9148 \times 0{,}00328 \approx 0{,}057 + 0{,}003 = 0{,}06 = P(D)$ ✓

— **Bilan du contrôle** : le taux de défauts passe de 6 % à 0,33 % après contrôle — une division par **18**.

— **Coût du contrôle** : 2,82 % de bonnes pièces sont rejetées à tort, soit $\frac{0{,}0282}{0{,}94} = 3\,\%$ des bonnes pièces ✓ — c'est le prix de la sécurité.

Réponse. a) 0,0852 · b) ≈ 0,669 · c) ≈ 0,0033.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).