

Plaquette 3 – Indépendance d'événements

Probabilités conditionnelles — Première spé maths

Exercices

Méthode

Deux événements sont indépendants quand **savoir que l'un est réalisé ne change rien** à la probabilité de l'autre. Cela se teste par un calcul : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. On apprend à le vérifier, à ne pas le confondre avec « incompatibles », et à l'utiliser pour les répétitions d'expériences.

Exercice 1 – Tester l'indépendance

Dans chaque cas, dire si les événements A et B sont indépendants.

- a) $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,2$
- b) $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,2$
- c) $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,8$, $P(A \cap B) = 0,2$

Exercice 2 – Indépendants ou incompatibles ?

On donne $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,8$.

- a) Calculer $P(A \cap B)$. Les événements sont-ils incompatibles ?
- b) Sont-ils indépendants ?

Exercice 3 – Le dé et la pièce

On lance un dé équilibré et une pièce équilibrée. On note A « le dé donne un nombre pair » et B « la pièce donne pile ».

Démontrer que A et B sont indépendants.

Exercice 4 – Indépendance dans un tableau

Un sondage auprès de 500 personnes donne le tableau suivant.

.	Favorable	Défavorable	Total
Hommes	120	80	200
Femmes	180	120	300
Total	300	200	500

Les événements « être un homme » et « être favorable » sont-ils indépendants ?

Exercice 5 – Utiliser l'indépendance

A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,2$.

Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 6 - Passer au contraire

A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,45$.
Démontrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants, et calculer $P(A \cap \bar{B})$.

Exercice 7 - Trois lancers

On lance trois fois une pièce équilibrée.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois pile ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?

Exercice 8 - Le tir à l'arc

Un archer touche la cible avec une probabilité de 0,8 à chaque tir, indépendamment des tirs précédents. Il tire 4 flèches.

- a) Quelle est la probabilité qu'il touche les quatre fois ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il manque au moins une fois ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il manque les quatre fois ?

Exercice 9 - Deux machines en série

Un système fonctionne si ses deux composants fonctionnent. Le premier tombe en panne avec une probabilité de 0,05, le second de 0,08, indépendamment l'un de l'autre.

- a) Quelle est la probabilité que le système fonctionne ?
- b) Quelle est la probabilité qu'au moins un composant tombe en panne ?

Exercice 10 - Deux machines en parallèle

Deux pompes identiques alimentent un réservoir ; il suffit qu'**une seule** fonctionne. Chaque pompe tombe en panne avec une probabilité de 0,1, indépendamment de l'autre.

Quelle est la probabilité que le réservoir soit alimenté ?

Exercice 11 - Le code à composer

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun de 0 à 9. Une personne essaie un code au hasard, sans mémoriser ses essais (les tentatives sont donc indépendantes).

- a) Quelle est la probabilité d'ouvrir le cadenas en un essai ?
- b) Quelle est la probabilité de l'ouvrir en au plus 5 essais ?

Exercice 12 - Indépendance et tableau à compléter

On sait que A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$.
Déterminer $P(B)$.

Exercice 13 – Un contre-exemple

On lance deux dés équilibrés. Soit A « le premier dé donne 6 », B « le second dé donne 6 » et C « la somme vaut 7 ».

- a) A et B sont-ils indépendants ?
- b) A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 14 – Le taux de réponse

Un institut envoie un questionnaire à 6 personnes choisies au hasard. Chaque personne répond avec une probabilité de 0,35, indépendamment des autres.

- a) Quelle est la probabilité qu'aucune ne réponde ?
- b) Quelle est la probabilité qu'au moins une réponde ?
- c) Combien faut-il envoyer de questionnaires pour que la probabilité d'obtenir au moins une réponse dépasse 0,99 ?

Exercice 15 – Synthèse : dépendance ou indépendance ?

Dans une ville, 55 % des habitants possèdent une voiture, 30 % possèdent un vélo, et 18 % possèdent les deux.

- a) Les événements « posséder une voiture » et « posséder un vélo » sont-ils indépendants ?
- b) Calculer la probabilité qu'un habitant possède au moins l'un des deux.
- c) Un habitant possède une voiture : quelle est la probabilité qu'il possède aussi un vélo ?