MATHÉMATIQUES

Probabilités conditionnelles

Première spé maths

Probabilité conditionnelle • Arbre pondéré • Partition • Probabilités totales
Indépendance • Épreuves indépendantes • Épreuve de Bernoulli • Monte-Carlo

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première générale** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Probabilités et statistiques », section « Probabilités conditionnelles et indépendance ». Il couvre :

- probabilité conditionnelle et arbres pondérés (rappels de seconde) ;
- partition de l'univers (système complet d'événements), **formule des probabilités totales** ;
- **indépendance** de deux événements ;
- succession de deux épreuves indépendantes, représentée par un arbre ou un tableau ;
- pour $n \leq 4$, répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, représentée par un arbre ;
- **algorithme** : méthode de Monte-Carlo.

La loi binomiale et les coefficients binomiaux seront étudiés en terminale.

Objectif : calculer des probabilités à l'aide d'arbres et de la formule des probabilités totales, reconnaître et utiliser l'indépendance, et modéliser la répétition de quelques épreuves de Bernoulli.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Probabilité conditionnelle : rappels **3**

2 Formule des probabilités totales **3**

3 Indépendance de deux événements **4**

4 Succession d'épreuves indépendantes **4**

5 Répétition d'épreuves de Bernoulli ($n \leq 4$) **5**

6 Simulation : méthode de Monte-Carlo **6**

7 Erreurs classiques **6**

8 Fiche de synthèse **7**

9 Exercices d'application **7**

10 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Probabilité conditionnelle : rappels

Probabilité de B sachant A

Pour $P(A) \neq 0$:

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad \text{d'où} \qquad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Dans un tirage équiprobable, $P_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

Règles des arbres pondérés

- Les branches issues d'un même nœud totalisent 1 ; au second niveau, elles portent des probabilités conditionnelles.
- La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches.
- La probabilité d'un événement réalisé par plusieurs chemins est la **somme** de leurs probabilités.

2. Formule des probabilités totales

Partition de l'univers

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités non nulles forment une **partition** de l'univers Ω (ou système complet d'événements) s'ils sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est Ω. Exemple : A et $\overline{A}$.

Formule des probabilités totales

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω, alors pour tout événement B :

$$\boxed{P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

Avec deux événements : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

Démonstration. Les événements $A_i \cap B$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est B (tout élément de B est dans un et un seul A_i). Donc $P(B)$ est la somme des $P(A_i \cap B)$, et chacun vaut $P(A_i)P_{A_i}(B)$.

Trois fournisseurs

Un magasin reçoit 50 % de ses articles du fournisseur F_1, 30 % de F_2 et 20 % de F_3 ; les taux de défaut sont 2 %, 4 % et 5 %. F_1, F_2, F_3 forment une partition, donc

$$P(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}01 = 0{,}032.$$

Un article est défectueux : $P_D(F_3) = \dfrac{0{,}01}{0{,}032} = 0{,}312\,5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Inverser le conditionnement

On connaît $P_A(B)$ et l'on cherche $P_B(A)$: on calcule $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$, puis $P(B)$ par les probabilités totales, et enfin $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. C'est la situation des tests de dépistage (faux positifs).

3. Indépendance de deux événements

Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Un dé

On lance un dé équilibré ; A : « pair » $= \{2\,;4\,;6\}$, B : « au plus 4 » $= \{1\,;2\,;3\,;4\}$. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ et $A \cap B = \{2\,;4\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$: A et B sont indépendants.

Indépendance et contraire

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration. Par les probabilités totales, $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$, donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(\overline{A})P(B)$.

Indépendants n'est pas incompatibles

Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants : $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$. Savoir que A est réalisé montre au contraire que B ne l'est pas.

4. Succession d'épreuves indépendantes

Deux épreuves indépendantes

Lorsque deux épreuves sont **indépendantes** (le résultat de la première n'influence pas la seconde), on les modélise par un arbre dont les branches du second niveau sont les **mêmes** quel que soit le résultat de la première, ou par un tableau à double entrée. La probabilité d'un couple de résultats est le produit des probabilités.

Une pièce puis un dé

On lance une pièce équilibrée puis un dé équilibré. $P(\text{pile et } 6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Le tableau à double entrée compte $2 \times 6 = 12$ issues équiprobables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Une hypothèse du modèle

L'indépendance fait partie de la modélisation : elle se justifie par l'analyse de la situation (tirages avec remise, appareils séparés…). Des tirages **sans remise** ne sont pas indépendants.

5. Répétition d'épreuves de Bernoulli ($n \leq 4$)

Épreuve de Bernoulli

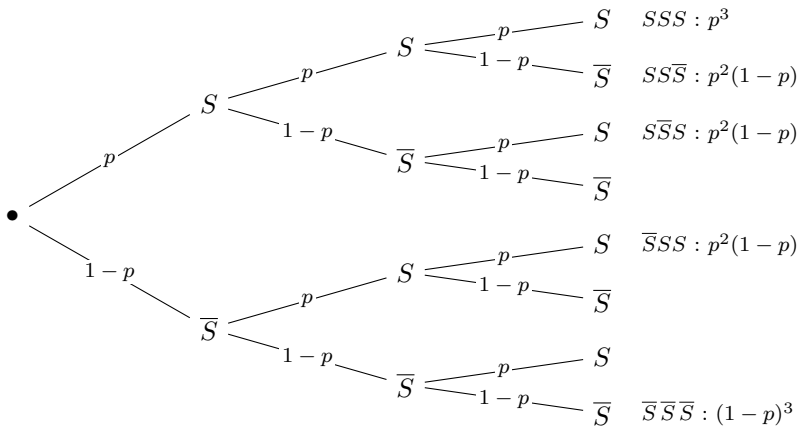
Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : « succès » S, de probabilité p, et « échec » $\overline{S}$, de probabilité $1-p$.

Répétition

On répète n fois ($n \leq 4$), de façon **indépendante**, la même épreuve de Bernoulli. L'arbre a 2^n chemins ; un chemin comportant k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Pour obtenir la probabilité de « exactement k succès », on compte les chemins correspondants sur l'arbre et l'on multiplie.



Trois épreuves de Bernoulli indépendantes : 8 chemins, dont 3 avec exactement deux succès.

Trois tirs indépendants

Un joueur réussit un tir avec la probabilité $p = 0{,}3$; il tire 3 fois, de façon indépendante.

— Exactement deux réussites : trois chemins ($SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $\overline{S}SS$), chacun de probabilité $0{,}3^2 \times 0{,}7$:

$$P = 3 \times 0{,}09 \times 0{,}7 = 0{,}189.$$

— Au moins une réussite : on passe par le contraire « aucune réussite », de probabilité $0{,}7^3 = 0{,}343$, d'où $P = 1 - 0{,}343 = 0{,}657$.

— Contrôle : $0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}027 = 1$ (zéro, une, deux, trois réussites).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Quatre lancers d'une pièce

Avec $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$, les 16 chemins sont équiprobables. En les listant, on compte 1, 4, 6, 4, 1 chemins comportant 0, 1, 2, 3, 4 piles. Ainsi $P(\text{exactement deux piles}) = \frac{6}{16} = 0{,}375$.

6. Simulation : méthode de Monte-Carlo

Estimer π

On tire au hasard un point $M(x\,;y)$ dans le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$. La probabilité qu'il tombe dans le quart de disque de centre O et de rayon 1 (c'est-à-dire $x^2+y^2\leq 1$) est le rapport des aires, $\frac{\pi}{4}$.

```
from random import random

def estimation_pi(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            compteur = compteur + 1
    return 4 * compteur / n
```

D'après la loi des grands nombres, pour n grand, la fréquence observée est proche de $\frac{\pi}{4}$ et la fonction renvoie une valeur proche de π.

7. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$, ou $P_A(B)$ et $P(A\cap B)$.
- Appliquer les probabilités totales avec des événements qui ne forment pas une partition.
- Confondre « indépendants » et « incompatibles ».
- Multiplier les probabilités d'épreuves qui ne sont pas indépendantes (tirages sans remise).
- Oublier qu'il y a plusieurs chemins pour « exactement k succès ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Fiche de synthèse

Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$; $P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$
Probabilités totales	$P(B) = \sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ pour une partition (A_i)
Indépendance	$P(A\cap B) = P(A)P(B) \iff P_A(B) = P(B)$
Épreuves indépendantes	mêmes branches au second niveau ; produit des probabilités
Bernoulli	succès p, échec $1-p$; chemin à k succès : $p^k(1-p)^{n-k}$
Au moins un	$1 - P(\text{aucun})$

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Probabilités totales

On sait que $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$. Calculer $P(B)$ puis $P_B(A)$.

Exercice 2 – Indépendance

$P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A\cap B) = 0{,}2$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Calculer $P(A\cup B)$.

Exercice 3 – Lancers francs

Une joueuse réussit un lancer franc avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres. Elle en tire trois. Calculer la probabilité de trois réussites, d'exactement deux réussites, d'au moins une réussite.

Exercice 4 – Quatre pièces

On lance quatre fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux piles, puis au moins un pile.

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. A et $\overline{A}$ forment une partition : $P(B) = 0{,}6\times 0{,}3 + 0{,}4\times 0{,}5 = 0{,}18 + 0{,}2 = 0{,}38$. Puis $P_B(A) = \dfrac{0{,}18}{0{,}38} \approx 0{,}474$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $P(A)\times P(B) = 0{,}4\times 0{,}5 = 0{,}2 = P(A\cap B)$: A et B sont indépendants. $P(A\cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. Trois réussites : $0{,}8^3 = 0{,}512$. Exactement deux : trois chemins de probabilité $0{,}8^2\times 0{,}2$, soit $3\times 0{,}64\times 0{,}2 = 0{,}384$. Au moins une : $1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. 16 chemins équiprobables, dont 6 avec exactement deux piles ($PPFF$, $PFPF$, $PFFP$, $FPPF$, $FPFP$, $FFPP$) : $P = \dfrac{6}{16} = 0{,}375$. Au moins un pile : $1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} = 0{,}937\,5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).