

Plaquette 3 – Applications géométriques

Produit scalaire dans le plan – Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus), dans un triangle quelconque :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

C'est la généralisation de Pythagore : si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, le dernier terme s'annule.

Pour retrouver un angle, on isole le cosinus :

$$\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$

Aire d'un triangle :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

Théorème de la médiane. Si I est le milieu de $[BC]$:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Ensembles de points classiques, avec I milieu de $[AB]$:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$: **cercle** de diamètre $[AB]$;
- $MA^2 + MB^2 = k$: **cercle** de centre I (ou un point, ou l'ensemble vide) ;
- $MA^2 - MB^2 = k$: **droite perpendiculaire** à (AB) ;
- $MA = MB$: **médiatrice** de $[AB]$.

Le calcul qui sert partout. En développant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Toutes les formules ci-dessus en découlent.

Correction de l'exercice 1 – Al-Kashi pour une longueur

On applique le théorème d'Al-Kashi, qui relie les trois côtés et un angle :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

- **Substitution** : $BC^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60^\circ$.
- **Valeur remarquable** : $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, donc $2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2} = 35$.
- **Calcul** : $BC^2 = 49 + 25 - 35 = 39$.

$$BC = \sqrt{39} \approx 6,2 \text{ cm}$$

Contrôle de vraisemblance. L'inégalité triangulaire impose $2 < BC < 12$ ✓ Et si l'angle était droit, on aurait $BC = \sqrt{74} \approx 8,6$: un angle plus fermé donne un côté plus court, c'est cohérent.

Quand l'utiliser. Al-Kashi s'applique dès qu'on connaît **deux côtés et l'angle entre eux** : c'est le cas que Pythagore ne sait pas traiter.

Réponse. $BC = \sqrt{39} \approx 6,24 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 2 – Al-Kashi pour un angle

On part d'Al-Kashi et on **isole le cosinus** :

$$\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$

— **Substitution** :

$$\cos \hat{A} = \frac{49 + 25 - 64}{2 \times 7 \times 5} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

— **Angle** : $\cos \hat{A} \approx 0,1429$, donc à la calculatrice $\hat{A} \approx 81,8^\circ$.

Contrôle du signe. Le cosinus est **positif** mais petit : l'angle est aigu et proche de 90° ✓
La figure, construite à partir des trois longueurs, le confirme.

Un test utile. Si l'on avait trouvé un cosinus négatif, l'angle serait obtus ; s'il valait 0, le triangle serait rectangle en A — ce qui correspondrait à $BC^2 = AB^2 + AC^2$, soit $BC = \sqrt{74}$.

Réponse. $\cos \hat{A} = \frac{1}{7}$, soit $\hat{A} \approx 81,8^\circ$.

Correction de l'exercice 3 – Avec un angle obtus

— **Formule** :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

— **Cosinus de l'angle obtus** : $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

— **Attention au double signe** : $-2 \times 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = +24$.

$$BC^2 = 16 + 36 + 24 = 76$$

— **Valeur exacte** : $BC = \sqrt{76} = \sqrt{4 \times 19} = 2\sqrt{19} \approx 8,72$ cm.

Ce qu'il faut comprendre. Avec un angle **obtus**, le terme d'Al-Kashi devient positif : le côté opposé est **plus long** que dans le cas rectangle ($\sqrt{52} \approx 7,2$). Plus l'angle s'ouvre, plus le côté opposé s'allonge.

— **Contrôle** : l'inégalité triangulaire donne $2 < BC < 10$ ✓

Réponse. $BC = 2\sqrt{19} \approx 8,72$ cm.

Correction de l'exercice 4 – L'aire par le sinus

On utilise la formule de l'aire avec le sinus de l'angle entre les deux côtés connus :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

— **Valeur remarquable** : $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— **Calcul** :

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,16 \text{ cm}^2$$

Pourquoi cette formule fonctionne. L'aire vaut $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$; en prenant $[AB]$ pour base, la hauteur issue de C vaut $AC \sin \hat{A}$.

Contrôle de cohérence. Le triangle est inscrit dans un rectangle de 7 par $AC \sin 60^\circ \approx 4,33$, d'aire $30,3 \text{ cm}^2$: l'aire trouvée en est bien la moitié ✓

Attention. C'est le **sinus** qui intervient dans l'aire, et le **cosinus** dans Al-Kashi : les

confondre est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. $S = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,16 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 5 - La longueur d'une médiane

On applique le **théorème de la médiane** :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

— **Substitution** : $25 + 49 = 2AI^2 + \frac{64}{2}$, soit $74 = 2AI^2 + 32$.

— **Résolution** : $2AI^2 = 42$, donc $AI^2 = 21$ et

$$AI = \sqrt{21} \approx 4,58$$

Contrôle de vraisemblance. La médiane doit être comprise entre... la demi-différence et la demi-somme des deux côtés : ici entre 1 et 6 ✓

D'où vient la formule. On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$, avec $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$. En développant les deux carrés scalaires, les doubles produits s'éliminent :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Réponse. $AI = \sqrt{21} \approx 4,58$.

Correction de l'exercice 6 - Démontrer le théorème d'Al-Kashi

Point de départ. On calcule le carré scalaire de $\overrightarrow{BC}$:

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

— **Développement**, comme pour une identité remarquable :

$$BC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \|\overrightarrow{AB}\|^2$$

— **On remplace le produit scalaire** par son expression avec l'angle, l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant $\hat{A}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

— **Conclusion** :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

Cas particulier. Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, alors $\cos \hat{A} = 0$ et il reste $BC^2 = AB^2 + AC^2$: le théorème de Pythagore est un **cas particulier** d'Al-Kashi.

Ce que la démonstration montre. Tout le chapitre tient dans le développement d'un carré scalaire : c'est la même technique qui donne la formule de la médiane et celle de polarisation.

Réponse. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$.

Correction de l'exercice 7 - La distance inaccessible

La distance BC n'est pas mesurable directement : on l'obtient par Al-Kashi.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

— **Substitution** : $BC^2 = 120^2 + 95^2 - 2 \times 120 \times 95 \times \cos 72^\circ$.

— **Calculs** : $14\,400 + 9\,025 = 23\,425$ et $2 \times 120 \times 95 = 22\,800$, avec $\cos 72^\circ \approx 0,3090$.

— $22\,800 \times 0,3090 \approx 7045$.

— **Résultat :**

$$BC^2 \approx 23\,425 - 7045 = 16\,380 \quad \text{donc} \quad BC \approx 128 \text{ m}$$

Contrôle de vraisemblance. L'inégalité triangulaire impose $25 < BC < 215$ ✓ Et l'angle étant un peu inférieur à l'angle droit, BC doit être un peu plus petit que $\sqrt{23\,425} \approx 153$ m ✓

C'est le principe de la triangulation, utilisé en topographie : on mesure ce qui est accessible (deux distances et un angle) pour calculer ce qui ne l'est pas.

Réponse. $BC \approx 128$ m.

Correction de l'exercice 8 - Le cap du navire

a) **Attention au vocabulaire.** Un « changement de cap de 40° » est la déviation par rapport à la **trajectoire poursuivie**, et non l'angle du triangle. L'angle $\hat{A}BC$ en est le supplémentaire :

$$\hat{A}BC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

b) On applique Al-Kashi dans le triangle ABC , avec l'angle **en** B :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos \hat{B}$$

— **Substitution** : $AC^2 = 18^2 + 25^2 - 2 \times 18 \times 25 \times \cos 140^\circ$.

— $\cos 140^\circ \approx -0,766$, donc $-900 \times (-0,766) \approx +689$.

— $AC^2 \approx 324 + 625 + 689 = 1638$, d'où

$$AC \approx 40,5 \text{ km}$$

Contrôle de vraisemblance. Si le navire avait continué tout droit, il serait à 43 km ; avec un virage de 40° , il est un peu plus près du port : 40,5 km est cohérent ✓

Le piège de l'énoncé. Identifier le bon angle du triangle **avant** d'appliquer la formule : c'est là que se perdent la plupart des points.

Réponse. a) $\hat{A}BC = 140^\circ$ — b) $AC \approx 40,5$ km.

Correction de l'exercice 9 - La hauteur par l'aire

a) **Aire par le sinus :**

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \frac{1}{2} = 13,5$$

b) La hauteur issue de C est relative à la base $[AB]$. On écrit l'aire de l'autre façon :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times h$$

— **Substitution** : $13,5 = \frac{1}{2} \times 6 \times h = 3h$, donc

$$h = 4,5$$

Contrôle direct. Dans le triangle rectangle formé par la hauteur, $h = AC \sin \hat{A} = 9 \times \frac{1}{2} = 4,5$ ✓

La méthode générale. Une aire calculée **d'une façon** puis exprimée **d'une autre** donne une équation : c'est le moyen le plus rapide d'obtenir une hauteur, un rayon ou une distance.

Réponse. a) 13,5 — b) $h = 4,5$.

Correction de l'exercice 10 – Un ensemble de points

Méthode 1 — par les coordonnées. Avec $M(x; y)$:

$$MA^2 = (x + 3)^2 + y^2 \quad MB^2 = (x - 3)^2 + y^2$$

- **Somme** : $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 + 2y^2 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 6x + 9 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18$.
- L'équation devient $2x^2 + 2y^2 + 18 = 50$, soit $x^2 + y^2 = 16$.

Conclusion. C'est le cercle de centre $O(0; 0)$ et de **rayon** 4.

Méthode 2 — par le théorème de la médiane, avec O milieu de $[AB]$:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MO^2 + 18$$

- L'équation donne $2MO^2 = 32$, donc $MO = 4$: on retrouve le cercle de centre O et de rayon 4.
- **Contrôle** : pour $M(4; 0)$, $MA^2 + MB^2 = 49 + 1 = 50$ ✓ ; pour $M(0; 4)$, $25 + 25 = 50$ ✓

À retenir. Une condition en $MA^2 + MB^2$ donne un **cercle centré au milieu** de $[AB]$ — vide si la constante est trop petite.

Réponse. Le cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 4.

Correction de l'exercice 11 – Une différence de carrés

Calcul avec les coordonnées. Avec $M(x; y)$:

$$MA^2 - MB^2 = [(x + 3)^2 + y^2] - [(x - 3)^2 + y^2]$$

- Les termes en y^2 **disparaissent**, ainsi que les x^2 :

$$MA^2 - MB^2 = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 12x$$

- L'équation devient $12x = 12$, soit

$$x = 1$$

Conclusion. L'ensemble cherché est la **droite verticale** d'équation $x = 1$, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point d'abscisse 1.

- **Contrôle** : pour $M(1; 0)$, $MA^2 = 16$ et $MB^2 = 4$, différence 12 ✓ ; pour $M(1; 5)$, $MA^2 = 16 + 25 = 41$ et $MB^2 = 4 + 25 = 29$, différence 12 ✓ — l'ordonnée n'intervient pas.

Le résultat général. $MA^2 - MB^2 = k$ décrit toujours une **droite perpendiculaire** à (AB) ; c'est le cas $k = 0$ qui donne la médiatrice.

Réponse. La droite d'équation $x = 1$, perpendiculaire à (AB) .

Correction de l'exercice 12 – L'aire du parallélogramme

- a) Le parallélogramme est formé de **deux triangles** identiques ABD et CDB . Son aire vaut donc le double de celle du triangle :

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \hat{A} = AB \times AD \times \sin \hat{A}$$

- **Calcul** : $8 \times 5 \times \sin 50^\circ \approx 40 \times 0,766 = 30,6$, soit environ 31 cm^2 .
- b) Dans le triangle ABD , on applique Al-Kashi avec l'angle en A :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos 50^\circ$$

- $\cos 50^\circ \approx 0,643$, donc $2 \times 8 \times 5 \times 0,643 \approx 51,4$.
- $BD^2 \approx 64 + 25 - 51,4 = 37,6$, d'où $BD \approx 6,1$ cm.

Contrôle. La diagonale $[BD]$ est celle qui « ferme » l'angle aigu : elle doit être plus courte que l'autre diagonale $[AC]$, qui vaut $\sqrt{64 + 25 + 51,4} \approx 11,8$ cm ✓

Réponse. a) environ 31 cm² — b) $BD \approx 6,1$ cm.

Correction de l'exercice 13 - Trois longueurs, tous les angles

On applique trois fois la formule des cosinus.

- **Angle $\hat{A}$** , opposé à a :

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 25 - 81}{70} = \frac{-7}{70} = -0,1$$

- Cosinus négatif : $\hat{A}$ est **obtus**, $\hat{A} \approx 96^\circ$.

- **Angle $\hat{B}$** :

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{81 + 25 - 49}{90} = \frac{57}{90} \approx 0,633$$

- Donc $\hat{B} \approx 51^\circ$.

- **Angle $\hat{C}$** :

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{81 + 49 - 25}{126} = \frac{105}{126} \approx 0,833$$

- Donc $\hat{C} \approx 33,6^\circ$, arrondi à 34° .

Vérification indispensable. La somme des angles doit valoir 180° :

$$96 + 51 + 34 = 181$$

L'écart d'un degré vient des arrondis successifs ; avec plus de décimales, $95,7 + 50,7 + 33,6 = 180$ ✓

Cohérence. Le plus grand angle fait face au plus grand côté : $\hat{A}$ est opposé à $a = 9$ ✓

Réponse. $\hat{A} \approx 96^\circ$, $\hat{B} \approx 51^\circ$, $\hat{C} \approx 34^\circ$.

Correction de l'exercice 14 - Le triangle de visée

- a) On connaît les trois côtés : on applique la formule des cosinus avec l'angle en A, opposé à $[BM]$.

$$\cos \hat{MAB} = \frac{AM^2 + AB^2 - BM^2}{2 \times AM \times AB}$$

- **Substitution** : $\frac{1024 + 1600 - 625}{2 \times 32 \times 40} = \frac{1999}{2560} \approx 0,781$.

- Donc $\hat{MAB} \approx 38,6^\circ$.

- b) **Aire par le sinus**, avec cet angle :

$$S = \frac{1}{2} \times AM \times AB \times \sin \hat{MAB}$$

- $\sin 38,6^\circ \approx 0,624$, donc $S \approx \frac{1}{2} \times 32 \times 40 \times 0,624 \approx 399$ km².

Contrôle de vraisemblance. L'aire maximale possible, obtenue si l'angle était droit, vaudrait $\frac{1}{2} \times 32 \times 40 = 640$ km² : la valeur trouvée est bien inférieure ✓

Remarque. On pourrait aussi calculer la **hauteur** issue de M : $h = \frac{2S}{AB} \approx \frac{798}{40} \approx 20$ km,

c'est-à-dire la distance de l'avion à la droite (AB) .

Réponse. a) $\widehat{MAB} \approx 38,6^\circ$ — b) environ 399 km^2 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : tout sur un triangle

a) **Produit scalaire :**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 10 \times \cos 60^\circ = 60 \times \frac{1}{2} = 30$$

— **Longueur BC ,** par la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$$BC^2 = 36 + 100 - 60 = 76$$

— Donc $BC = 2\sqrt{19} \approx 8,72$.

— b) **Aire :**

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin 60^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \approx 25,98$$

c) **Théorème de la médiane,** avec I milieu de $[BC]$:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

— **Substitution :** $136 = 2AI^2 + 38$, donc $AI^2 = 49$ et $AI = 7$.

Contrôle de vraisemblance. La médiane $AI = 7$ est comprise entre les deux côtés 6 et 10 ✓ et le triangle, presque isocèle par ses angles, a une aire cohérente avec un rectangle de 6 par 10 dont elle représente environ 43 % ✓

Bilan des outils. Un seul produit scalaire a donné la longueur, l'angle a donné l'aire, et le théorème de la médiane a conclu — sans aucune coordonnée.

Réponse. a) 30 et $BC = 2\sqrt{19}$ — b) $15\sqrt{3} \approx 25,98$ — c) $AI = 7$.