

Plaquette 1 – Calcul du produit scalaire

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les quatre expressions du produit scalaire.

- **Avec l'angle** : si θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

- **Avec les coordonnées**, dans un repère **orthonormé** : si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

- **Avec le projeté orthogonal** : si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$$

(le signe est + si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens, – sinon).

- **Avec les normes** (formule de polarisation) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, souvent noté $\vec{u}^2$.

Règles de calcul (le produit scalaire est symétrique et bilinéaire) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Signe du produit scalaire. Il est **positif** si l'angle est aigu, **nul** si l'angle est droit, **négatif** si l'angle est obtus.

Norme à partir des coordonnées : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Correction de l'exercice 1 – Avec les normes et l'angle

On applique l'expression avec l'angle :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

- **Substitution** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3}$.

- **Valeur remarquable** : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

- **Calcul** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 \times \frac{1}{2} = 7,5$$

Contrôle du signe. L'angle $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ est **aigu**, donc le produit scalaire doit être positif : c'est bien le cas.

À retenir. Le résultat est un **nombre réel**, sans flèche et sans unité vectorielle : écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7,5$ et non $\overrightarrow{7,5}$.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7,5$.

Correction de l'exercice 2 - Un angle obtus

— **Formule :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 \times \cos \frac{2\pi}{3}$$

— **Valeur du cosinus :** $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

— **Calcul :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -7,5$.

Commentaire. L'angle $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ est **obtus** : son cosinus est négatif, donc le produit scalaire l'est aussi. Les deux vecteurs « vont globalement dans des directions opposées ».

La règle de signe, à connaître :

Angle	aigu	droit	obtus
Signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$	+	0	-

Le produit scalaire mesure donc à la fois la longueur des vecteurs **et** leur tendance à pointer dans la même direction.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7,5$: l'angle est obtus.

Correction de l'exercice 3 - Les cas extrêmes

Dans les trois cas, on applique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ avec l'angle correspondant.

a) Même sens : $\theta = 0$ et $\cos 0 = 1$, donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 7 \times 1 = 28$$

b) Sens contraires : $\theta = \pi$ et $\cos \pi = -1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = -28$.

c) Orthogonaux : $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Encadrement général. Comme $-1 \leq \cos \theta \leq 1$:

$$-\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est donc toujours compris entre -28 et 28 , les extrêmes correspondant aux vecteurs colinéaires.

Réponse. a) 28 — b) -28 — c) 0 .

Correction de l'exercice 4 - Par les coordonnées

a) Dans un repère **orthonormé**, le produit scalaire se calcule directement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

— **Application :** $3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = 2$.

— Le résultat est positif : l'angle entre les deux vecteurs est **aigu**.

— b) La norme s'obtient par le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

— $\|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,40$.

Attention à l'hypothèse. La formule $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère **orthonormé** : dans un repère quelconque, elle est fautive.

— **Contrôle de cohérence :** $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2$ est bien inférieur à $\sqrt{13} \times \sqrt{41} \approx 23,1$ ✓

Réponse. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ — b) $\sqrt{13}$ et $\sqrt{41}$.

Correction de l'exercice 5 - Trois points dans un repère

— **Coordonnées des vecteurs** : on soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 1 \times 4 = 8$$

— **Nature de l'angle** : le produit scalaire est **strictement positif**, donc $\cos \hat{BAC} > 0$: l'angle $\hat{BAC}$ est **aigu**.

— **Pour aller plus loin** : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{17}$, donc

$$\cos \hat{BAC} = \frac{8}{17} \approx 0,47$$

soit un angle d'environ 62° ✓ — la figure le confirme.

Erreur à éviter. Ne pas confondre les coordonnées des **points** et celles des **vecteurs** : le calcul se fait toujours sur les vecteurs.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 > 0$: l'angle $\hat{BAC}$ est aigu.

Correction de l'exercice 6 - Avec le projeté orthogonal

La formule du projeté remplace $\overrightarrow{AC}$ par sa « part utile » le long de (AB) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

— Ici $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le **même sens** (le point H est entre A et B), donc le produit est positif :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 8 \times 3 = 24$$

Pourquoi ça marche. En décomposant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$, on obtient

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$$

et le second produit est **nul** puisque $\overrightarrow{HC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Attention au sens. Si H était de l'autre côté de A , on aurait $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$: le signe se lit sur la figure, il ne se devine pas.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$.

Correction de l'exercice 7 - Le carré scalaire

a) Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est le **carré de sa norme** :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 6^2 = 36$$

— En effet, l'angle entre $\vec{u}$ et lui-même est nul, et $\cos 0 = 1$.

— b) **Première méthode, par les coordonnées** :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3) \times (-3) + 4 \times 4 = 9 + 16 = 25$$

— **Seconde méthode, par la norme** : $\|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$, donc $\vec{v} \cdot \vec{v} = 5^2 = 25$ ✓

Notation. On écrit souvent $\vec{u}^2$ pour $\vec{u} \cdot \vec{u}$. C'est cette identité qui permet de développer des expressions comme

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

exactement comme une identité remarquable en calcul littéral.

Réponse. a) 36 — b) 25 par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 8 - La formule de polarisation

On utilise la formule de polarisation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

— **Substitution :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (49 - 25 - 9) = \frac{15}{2} = 7,5$$

D'où vient la formule. On développe le carré scalaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

puis on isole $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Contrôle de cohérence. On en déduit $\cos \theta = \frac{7,5}{5 \times 3} = 0,5$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$: un angle possible, entre 0 et π ✓ Si l'on avait trouvé un cosinus supérieur à 1, c'est que les trois longueurs données étaient incompatibles.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7,5$.

Correction de l'exercice 9 - Dans un carré

Premier produit, par le projeté orthogonal. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est le point B lui-même, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 16$$

— **Contrôle par les coordonnées**, dans le repère d'origine A : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, d'où $4 \times 4 + 0 \times 4 = 16$ ✓

— **Contrôle par l'angle** : $AC = 4\sqrt{2}$ et l'angle vaut $\frac{\pi}{4}$, donc $4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$ ✓

Second produit. Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ sont **perpendiculaires** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

Ce qu'il faut retenir. Dans une figure usuelle, le projeté orthogonal tombe souvent sur un sommet : le calcul se fait alors de tête.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Correction de l'exercice 10 - Dans un triangle équilatéral

a) Dans un triangle équilatéral, tous les angles valent $\frac{\pi}{3}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \cos \frac{\pi}{3} = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

b) **Attention à l'angle.** L'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ **n'est pas** celui du triangle : les deux vecteurs partent de points différents. En ramenant $\overrightarrow{AB}$ au point B , on constate que l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ vaut $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \times 6 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 36 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$$

— **Contrôle par les coordonnées** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, d'où $6 \times (-3) + 0 = -18$ ✓

Le piège classique. Il faut toujours ramener les deux vecteurs à une **même origine** avant de lire l'angle : $\widehat{ABC}$ et l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont supplémentaires.

Réponse. a) 18 — b) -18.

Correction de l'exercice 11 - Développer une expression vectorielle

On développe en utilisant la **bilinéarité** :

$$(2\vec{u}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v}$$

- **Premier terme** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 4$, donc $2 \times 4 = 8$.
- **Second terme** : $6 \times 3 = 18$.
- **Somme** :

$$(2\vec{u}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) = 8 + 18 = 26$$

Ce qu'on utilise. Le produit scalaire se développe **exactement comme un produit de nombres** : les coefficients sortent, la distributivité s'applique. La seule différence est que $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se remplace par $\|\vec{u}\|^2$.

Remarque. La norme $\|\vec{v}\| = 4$ n'a pas servi : un énoncé peut fournir une donnée inutile, c'est à l'élève de trier.

Réponse. 26.

Correction de l'exercice 12 - Calculer un angle

On part de l'expression avec l'angle, que l'on retourne :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

- **Produit scalaire** : $1 \times 3 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = 1$.
- **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.
- **Cosinus** :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 0,1414$$

- **Angle** : à la calculatrice, $\theta \approx 81,9^\circ$, soit environ 82° .

Contrôle de cohérence. Le produit scalaire est positif mais **petit** devant le produit des normes : l'angle doit être proche de 90° sans l'atteindre ✓

Vérification de l'ordre de grandeur. Si les vecteurs étaient orthogonaux, on aurait $1 \times 3 + 2 \times (-1) = 0$, ce qui n'est pas le cas — mais on en est très près.

Réponse. $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{50}}$, soit $\theta \approx 82^\circ$.

Correction de l'exercice 13 - Le travail d'une force

Le travail est un produit scalaire, donc un **nombre** :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta$$

- **Substitution** : $W = 50 \times 20 \times \cos 30^\circ$.

— $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

— **Calcul :**

$$W = 1000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3} \approx 866 \text{ J}$$

Interprétation physique. Seule la composante de la force **dans le sens du déplacement** travaille : c'est exactement ce que mesure le projeté orthogonal, ici $50 \cos 30^\circ \approx 43,3 \text{ N}$.

— **Contrôle :** $43,3 \times 20 \approx 866 \text{ J}$ ✓

Cas limites. Une force perpendiculaire au déplacement (comme le poids d'une caisse poussée horizontalement) a un travail **null** ; une force qui freine a un travail **négatif**.

Réponse. $W = 500\sqrt{3} \approx 866 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 14 - Dans un cube

Coordonnées dans le repère d'origine A, les axes étant portés par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire :** $4 \times 4 + 0 \times 4 + 0 \times 4 = 16$.

Méthode du projeté, sans coordonnées : le projeté orthogonal de G sur la droite (AB) est le point B, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 16$$

Bonus : l'angle de la grande diagonale. $AG = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$, donc

$$\cos \theta = \frac{16}{4 \times 4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

soit $\theta \approx 55^\circ$: c'est l'angle que fait la grande diagonale d'un cube avec une arête.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 16$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le parallélogramme

a) **Produit scalaire des deux côtés :**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 15 \times \frac{1}{2} = 7,5$$

b) Dans un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. On calcule le **carré scalaire** :

$$AC^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \|\overrightarrow{AD}\|^2$$

— **Substitution :** $AC^2 = 25 + 2 \times 7,5 + 9 = 25 + 15 + 9 = 49$.

— Donc $AC = 7$.

Contrôle de vraisemblance. L'inégalité triangulaire impose $AC \leq AB + AD = 8$: la valeur 7 est bien admissible ✓

Ce que cette méthode remplace. On vient de calculer une longueur **sans coordonnées et sans trigonométrie du triangle** : c'est le principal intérêt du produit scalaire, et le point de départ du théorème d'Al-Kashi.

Réponse. a) 7,5 — b) $AC = 7$.