

Plaquette 2 - Orthogonalité

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le critère fondamental. Pour deux vecteurs **non nuls** :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

En coordonnées orthonormées : $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Vecteur normal à une droite. Un vecteur $\vec{n}$ non nul est **normal** à une droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d .

$$d: ax + by + c = 0 \quad \text{admet} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ pour vecteur normal}$$

et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Équation d'une droite par un point et un vecteur normal. $M(x; y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux (ou leurs vecteurs directeurs) sont orthogonaux.

Trois lieux géométriques classiques.

- **Hauteur** issue de A : droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$;
- **médiatrice** de $[AB]$: droite passant par le milieu I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$;
- **cercle de diamètre** $[AB]$: ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Identité utile pour démontrer une perpendicularité :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Correction de l'exercice 1 - Tester l'orthogonalité

Le critère à appliquer, pour des vecteurs non nuls :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

- a) $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 6 - 6 = 0$: **orthogonaux**.
- b) $4 \times 1 + 1 \times 4 = 8 \neq 0$: **non orthogonaux**. Le produit scalaire est positif, l'angle est aigu.
- c) $-5 \times 2 + 2 \times 5 = -10 + 10 = 0$: **orthogonaux**.
- d) $0 \times 3 + 7 \times 0 = 0$: **orthogonaux** — ce sont d'ailleurs un vecteur vertical et un vecteur horizontal.

À observer. Dans les cas a) et c), le second vecteur s'obtient en **échangeant** les coordonnées du premier et en changeant **un** signe : c'est la recette pour construire un vecteur orthogonal à un vecteur donné.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ a pour vecteur orthogonal } \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Réponse. a) oui — b) non — c) oui — d) oui.

Correction de l'exercice 2 - Déterminer une inconnue

On traduit la condition d'orthogonalité par une **équation** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3 \times 2 + k \times 6 = 0$$

— On résout : $6 + 6k = 0$, donc $6k = -6$ et

$$k = -1$$

— **Vérification** : avec $k = -1$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0 \checkmark$

Interprétation. Le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; les vecteurs orthogonaux sont colinéaires à $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou encore à $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$: on retrouve bien $k = -1$.

Méthode générale. Une condition géométrique (orthogonalité, alignement, égalité de longueurs) se traduit toujours par une **équation** portant sur l'inconnue.

Réponse. $k = -1$.

Correction de l'exercice 3 - Un triangle rectangle ?

On teste l'orthogonalité en chaque sommet, en commençant par celui que la figure désigne.

— **Coordonnées des vecteurs issus de A** :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

— **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 1 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0$$

— Le produit scalaire est **nul** : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est **rectangle en A**.

Contrôle par la réciproque de Pythagore. $AB^2 = 36 + 1 = 37$, $AC^2 = 1 + 36 = 37$ et $BC^2 = 25 + 49 = 74$. Or $37 + 37 = 74 \checkmark$

Remarque. Comme $AB = AC = \sqrt{37}$, le triangle est même **rectangle isocèle** en A.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: le triangle est rectangle (et isocèle) en A.

Correction de l'exercice 4 - Lire un vecteur normal

La lecture directe : dans une équation cartésienne $ax + by + c = 0$,

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est normal} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est directeur}$$

a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) L'équation **n'est pas** sous forme cartésienne : on la transforme d'abord en $3x - y - 1 = 0$. Alors

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Contrôle du c)** : le coefficient directeur vaut 3, donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓
 Et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 - 3 = 0$ ✓

Erreur classique. Lire les coefficients sur une équation réduite $y = mx + p$: il faut **toujours** ramener à la forme $ax + by + c = 0$ avant de lire $\vec{n}$.

Réponse. a) $\vec{n}(2; -3)$ — b) $\vec{n}(1; 4)$ — c) $\vec{n}(3; -1)$, après réécriture $3x - y - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 5 - Une droite par un point et un vecteur normal

Traduction. Un point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

- **Coordonnées** : $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

- **Produit scalaire** :

$$3(x-1) + (-1)(y-2) = 0$$

- **Développement** : $3x - 3 - y + 2 = 0$, soit

$$d: 3x - y - 1 = 0$$

- **Vérification** : le point $A(1; 2)$ donne $3 - 2 - 1 = 0$ ✓ et le vecteur normal lu sur l'équation est bien $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

Méthode inverse, plus rapide. On sait que l'équation est de la forme $3x - y + c = 0$; on détermine c en remplaçant par les coordonnées de A : $3 - 2 + c = 0$ donne $c = -1$.

Réponse. $d: 3x - y - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 6 - La perpendiculaire à une droite

L'idée clé. Un vecteur normal de d devient un vecteur **directeur** de d' , et réciproquement.

- d a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Comme $d' \perp d$, le vecteur directeur de d est **normal** à d' : on prend $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou plus simplement $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- **Équation de d'** : elle est de la forme $2x - y + c = 0$. Le point $B(2; -1)$ donne

$$2 \times 2 - (-1) + c = 0 \Leftrightarrow 5 + c = 0$$

- Donc $c = -5$ et

$$d': 2x - y - 5 = 0$$

- **Vérification de la perpendicularité** : les vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifient

$$2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

- **Vérification du point** : $4 + 1 - 5 = 0$ ✓

Réponse. $d': 2x - y - 5 = 0$.

Correction de l'exercice 7 - L'équation d'une hauteur

Définition. La hauteur issue de A est la droite passant par A et **perpendiculaire** à (BC) : elle admet donc $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur **normal**.

— **Vecteur normal** :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3-4 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

— **Équation** : elle est de la forme $-x + 5y + c = 0$.

— **On utilise le point** $A(0; 1)$: $0 + 5 + c = 0$, donc $c = -5$.

$$-x + 5y - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5y + 5 = 0$$

— **Vérification** : $A(0; 1)$ donne $0 - 5 + 5 = 0$ ✓

— **Vérification de la perpendicularité** : le vecteur normal de la hauteur, $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ ✓

La recette. « Hauteur issue de A » se traduit immédiatement par « passe par A , vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ » : c'est l'un des grands intérêts du vecteur normal.

Réponse. $x - 5y + 5 = 0$.

Correction de l'exercice 8 - Trouver l'orthocentre

— a) La hauteur issue de B est perpendiculaire à (AC) , donc admet $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

— Son équation est de la forme $3x + 4y + c = 0$; le point $B(4; 0)$ donne $12 + c = 0$, donc $c = -12$:

$$3x + 4y - 12 = 0$$

b) L'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs : on résout le système formé avec la hauteur issue de A trouvée précédemment.

$$\begin{cases} x - 5y + 5 = 0 \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

— De la première équation : $x = 5y - 5$. On reporte dans la seconde :

$$3(5y - 5) + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow 15y - 15 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow 19y = 27$$

— Donc $y = \frac{27}{19}$ et $x = 5 \times \frac{27}{19} - 5 = \frac{135 - 95}{19} = \frac{40}{19}$.

$$H\left(\frac{40}{19}; \frac{27}{19}\right)$$

— **Contrôle** : $\frac{40}{19} - 5 \times \frac{27}{19} + 5 = \frac{40 - 135 + 95}{19} = 0$ ✓

Remarque. Deux hauteurs suffisent : la troisième passe automatiquement par H , c'est un théorème de géométrie.

Réponse. a) $3x + 4y - 12 = 0$ — b) $H\left(\frac{40}{19}; \frac{27}{19}\right)$.

Correction de l'exercice 9 - L'équation d'une médiatrice

Définition vectorielle. La médiatrice passe par le **milieu** I de $[AB]$ et admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur **normal**.

— **Milieu** :

$$I\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{3+1}{2}\right) = I(2; 2)$$

— **Vecteur normal** : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

— **Équation** : de la forme $3x - y + c = 0$, avec $I(2; 2) : 6 - 2 + c = 0$, donc $c = -4$.

$$3x - y - 4 = 0$$

— **Vérification par les distances** : pour le point $(0; -4)$ de la droite, $MA^2 = 1 + 49 = 50$ et $MB^2 = 25 + 25 = 50 \checkmark$ — il est bien équidistant de A et B .

Deux définitions, un seul objet. « Ensemble des points équidistants de A et B » et « droite passant par I de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ » décrivent la même droite ; la seconde donne l'équation en deux lignes.

Réponse. $3x - y - 4 = 0$.

Correction de l'exercice 10 - Le cercle de diamètre donné

Traduction en coordonnées.

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -2-x \\ -y \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 4-x \\ 2-y \end{pmatrix}$$

— Le produit scalaire s'écrit :

$$(-2-x)(4-x) + (-y)(2-y) = 0$$

— **Développement** : $-8 + 2x - 4x + x^2 - 2y + y^2 = 0$, soit

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$$

— **Forme canonique sur chaque variable** : $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$, d'où

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Reconnaissance. C'est l'équation du **cercle** de centre $I(1; 1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

— **Contrôle** : I est bien le milieu de $[AB]$, et $IA = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \checkmark$

Le théorème derrière. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$: c'est la version vectorielle de « tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle ».

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: centre $I(1; 1)$, rayon $\sqrt{10}$.

Correction de l'exercice 11 - Les diagonales du losange

On exprime les deux diagonales avec les côtés issus de A :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

— La première égalité vient de la règle du parallélogramme ; la seconde de la relation de Chasles : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

On calcule le produit scalaire en utilisant l'identité remarquable :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2$$

— **Hypothèse du losange** : $AB = AD$, donc $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AD}\|^2$ et le produit scalaire est **nul**.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

Les diagonales (AC) et (BD) sont donc **perpendiculaires**.

Ce qui rend la preuve courte. L'identité $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ transforme une question d'angles en une question de **longueurs**. La réciproque est vraie aussi : un parallélogramme à diagonales perpendiculaires est un losange.

Réponse. $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = AB^2 - AD^2 = 0$: les diagonales sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 12 - Deux droites perpendiculaires ?

Méthode 1 — par les vecteurs normaux.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{n}' \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

— Produit scalaire : $4 \times 3 + (-6) \times 2 = 12 - 12 = 0$.

— Les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les droites sont **perpendiculaires**.

Méthode 2 — par les coefficients directeurs. On réécrit les deux équations sous forme réduite :

— $d: y = \frac{4x+1}{6} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$, de coefficient directeur $m = \frac{2}{3}$;

— $d': y = \frac{7-3x}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, de coefficient directeur $m' = -\frac{3}{2}$.

— Le produit $mm' = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$: c'est le critère de perpendicularité ✓

Quelle méthode choisir ? Celle des vecteurs normaux : elle ne demande aucune transformation et fonctionne même pour une droite verticale, pour laquelle le coefficient directeur n'existe pas.

Réponse. Oui : $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ (et $mm' = -1$).

Correction de l'exercice 13 - Les coordonnées du projeté

Deux conditions caractérisent H : il appartient à (AB) , et $\vec{CH}$ est orthogonal à $\vec{AB}$.

— **Première condition** : $\vec{AH} = t\vec{AB}$ pour un réel t , donc $H(4t; 2t)$.

— **Seconde condition** :

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$$

— $\vec{CH} \begin{pmatrix} 4t-1 \\ 2t-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$4(4t-1) + 2(2t-5) = 0 \Leftrightarrow 16t - 4 + 4t - 10 = 0 \Leftrightarrow 20t = 14$$

— Donc $t = \frac{7}{10}$, et

$$H\left(\frac{28}{10}; \frac{14}{10}\right) = H(2,8; 1,4)$$

— **Vérification** : $\vec{CH} \begin{pmatrix} 1,8 \\ -3,6 \end{pmatrix}$ et $4 \times 1,8 + 2 \times (-3,6) = 7,2 - 7,2 = 0$ ✓

Application immédiate : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + 2 \times 5 = 14$, et par le projeté $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = 4 \times 2,8 + 2 \times 1,4 = 14$ ✓ Les deux expressions concordent.

Réponse. $H(2,8; 1,4)$.

Correction de l'exercice 14 - L'équerre du charpentier

Le test. L'angle en A est droit si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. On calcule ce produit scalaire à partir des **trois longueurs**, grâce à la formule de polarisation appliquée à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

— **Substitution** : $98^2 = 60^2 + 80^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, soit $9604 = 3600 + 6400 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

— D'où $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10\,000 - 9604 = 396$, et

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 198$$

Conclusion. Le produit scalaire n'est pas nul : l'assemblage **n'est pas d'équerre**. Comme il est **positif**, l'angle est **aigu** : l'assemblage est trop fermé.

— **Ordre de grandeur** : $\cos \hat{A} = \frac{198}{60 \times 80} = 0,04125$, soit $\hat{A} \approx 87,6^\circ$ — il manque environ $2,4^\circ$.

— **Contrôle** : si l'angle était droit, la diagonale mesurerait $\sqrt{3600 + 6400} = 100$ cm ; $98 < 100$ confirme un angle trop fermé ✓

Réponse. Non : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 198 > 0$, l'angle vaut environ $87,6^\circ$, il est trop fermé.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : hauteur, médiatrice et cercle

— a) **Milieu** : $I(3; 2)$. **Vecteur normal** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, simplifié en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— L'équation est de la forme $x + y + c = 0$, et I donne $3 + 2 + c = 0$, donc $c = -5$:

$$x + y - 5 = 0$$

b) Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $I(3; 2)$ et pour rayon $\frac{AB}{2}$. Or
 $AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$, donc le rayon vaut $2\sqrt{2}$:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

— c) **Test** : $(5 - 3)^2 + (0 - 2)^2 = 4 + 4 = 8$ ✓ Le point C appartient au cercle.

— **Conséquence** : C étant sur le cercle de diamètre $[AB]$, le triangle ABC est **rectangle en C**.

— **Vérification directe** : $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, dont le produit scalaire vaut 0 ✓

Bilan. Trois objets, trois traductions vectorielles : médiatrice (milieu + normal $\overrightarrow{AB}$), cercle de diamètre ($\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$), angle droit (produit scalaire nul).

Réponse. a) $x + y - 5 = 0$ — b) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$ — c) C est sur le cercle, ABC est rectangle en C.