Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cercles, lieux de points et optimisation

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation d'un cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

avec $c=a^2+b^2-R^2$. Pour revenir au centre et au rayon depuis la forme développée, on **complète les carrés**.

Cercle de diamètre $[AB]$:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

Médiatrice de $[AB]$: ensemble des M tels que $MA=MB$, ou encore

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=0 \quad \text{avec } I \text{ milieu de } [AB]$$

Lieux classiques.

Relation	Lieu
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$	cercle de diamètre $[AB]$
$MA=MB$	médiatrice de $[AB]$
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$	droite passant par A, normale $\vec{n}$
$MA^2+MB^2=k$	cercle de centre le milieu de $[AB]$

Théorème de la médiane. Si I est le milieu de $[AB]$:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$$

Tangente à un cercle. La tangente en un point T du cercle de centre Ω est la droite passant par T et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega T}$. Une droite est tangente au cercle si et seulement si $d(\Omega,\text{droite})=R$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si les vecteurs sont **colinéaires**.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un cercle

— **Complétion des carrés** :

$$x^2-6x=(x-3)^2-9 \qquad y^2+4y=(y+2)^2-4$$

— **Réécriture** : $(x-3)^2-9+(y+2)^2-4-3=0$, soit

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

— **Centre** : $\Omega(3\,;-2)$; **rayon** : $R=4$.

— **Contrôle par un point** : $(7\,;-2)$ donne $49+4-42-8-3=0$ ✓, et il est bien à la distance 4 de Ω ✓

— **Autre point** : $(3\,;2)$ donne $9+4-18+8-3=0$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle par la formule** : dans $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, on a $-2a=-6$ donc $a=3$, et $-2b=4$ donc $b=-2$ ✓

— **Rayon** : $R^2=a^2+b^2-c=9+4+3=16$ ✓

— **Attention** : si a^2+b^2-c était **négatif**, l'équation ne décrirait **aucun** point ; s'il était nul, un **seul** point.

Réponse. Centre $\Omega(3\,;-2)$, rayon $R=4$.

Correction de l'exercice 2 – Cercle de diamètre donné

— **Centre** : le milieu $\Omega(3\,;-1)$.

— **Rayon** : $\dfrac{AB}{2}$ avec $AB=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$, donc $R=\dfrac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}\approx 3{,}6056$.

— **Équation** :

$$(x-3)^2+(y+1)^2=13$$

— **Contrôles** : A donne $4+9=13$ ✓ et B donne $4+9=13$ ✓

— **Vérification par le produit scalaire** : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ s'écrit

$$(1-x)(5-x)+(2-y)(-4-y)=5-6x+x^2-8+2y-4y+y^2$$

— **Développement** : $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

— **Contrôle de l'équivalence** :
$(x-3)^2+(y+1)^2-13=x^2-6x+9+y^2+2y+1-13=x^2+y^2-6x+2y-3$ ✓

— **Point de contrôle supplémentaire** : $(3\,;-1+\sqrt{13})$ est sur le cercle, et l'angle en ce point est droit par le théorème de l'angle inscrit ✓

Réponse. $(x-3)^2+(y+1)^2=13$.

Correction de l'exercice 3 – Lieu de points : médiatrice

— **Nature du lieu** : c'est la **médiatrice** de $[AB]$.

— **Par le calcul** : $MA^2=MB^2$ s'écrit

$$(x+1)^2+(y-3)^2=(x-5)^2+(y-1)^2$$

— **Développement** : $x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2-10x+25+y^2-2y+1$.

— **Simplification** : $2x+10-6y=-10x+26-2y$, soit $12x-4y-16=0$, donc

$$3x-y-4=0$$

— **Contrôle par le milieu** : $I(2\,;2)$ doit appartenir à la médiatrice : $6-2-4=0$ ✓

— **Contrôle du vecteur normal** : $\overrightarrow{AB}(6\,;-2)$, proportionnel à $(3\,;-1)$ — qui est bien le vecteur normal lu dans l'équation ✓

— **Vérification sur un point** : $(1\,;-1)$ vérifie $3+1-4=0$; et $MA^2=4+16=20$, $MB^2=16+4=20$ ✓

— **Méthode la plus rapide** : passer directement par le milieu et le vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, sans développer les carrés.

Réponse. La médiatrice de $[AB]$: $3x-y-4=0$.

Correction de l'exercice 4 – Lieu de points : somme de carrés

— **Théorème de la médiane** avec $I(2\,;0)$ milieu de $[AB]$ et $AB=4$:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{16}{2}=2MI^2+8$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Équation** : $2MI^2 + 8 = 40$, donc $MI^2 = 16$ et $MI = 4$.
— **Lieu** : le **cercle** de centre $I(2\,;0)$ et de rayon 4 :

$$(x-2)^2 + y^2 = 16$$

— **Contrôle direct** : prenons $M(6\,;0)$, sur ce cercle. Alors $MA^2 = 36$ et $MB^2 = 4$, de somme 40 ✓
— **Autre point** : $M(2\,;4)$ donne $MA^2 = 4 + 16 = 20$ et $MB^2 = 4 + 16 = 20$, de somme 40 ✓
— **Vérification par le calcul brut** : $x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40$ donne $2x^2 - 8x + 16 + 2y^2 = 40$, soit $x^2 - 4x + y^2 = 12$ et $(x-2)^2 + y^2 = 16$ ✓
— **Condition d'existence** : il faut $MI^2 \geq 0$, donc $MA^2 + MB^2 \geq 8$ — la valeur 8 correspond au seul point I.

Réponse. Le cercle de centre $I(2\,;0)$ et de rayon 4.

Correction de l'exercice 5 – Tangente à un cercle

— **Vérification que T est sur le cercle** : $9 + 16 = 25$ ✓
— **Vecteur normal** : $\overrightarrow{OT}(3\,;4)$, où O est le centre.
— **Équation** : $3(x-3) + 4(y-4) = 0$, soit

$$3x + 4y - 25 = 0$$

— **Contrôle du point** : $9 + 16 - 25 = 0$ ✓
— **Contrôle de la tangence** : la distance du centre O à la droite vaut

$$\frac{|0 + 0 - 25|}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{5} = 5 = R$$

— La distance du centre égale le rayon : la droite est bien **tangente** ✓
— **Forme générale** : pour le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, la tangente en $(x_0\,;y_0)$ est $x_0x + y_0y = R^2$ ✓ — ici $3x + 4y = 25$.
— **Autre point de la tangente** : $(7\,;1)$ vérifie $21 + 4 - 25 = 0$ ✓, et $O(7\,;1)$ est à distance $\sqrt{50} \approx 7{,}07 > 5$ du centre — ce point est **extérieur** au cercle, comme tout point de la tangente sauf T ✓

Réponse. $3x + 4y - 25 = 0$.

Correction de l'exercice 6 – Droite et cercle : position relative

— **Distance du centre à la droite** :

$$d(\Omega, d) = \frac{|4 - 6 + 5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

— **Comparaison** : $0{,}6 < 3$, donc la droite est **sécante** — elle coupe le cercle en **deux points**.
— **Longueur de la corde** :

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - 0{,}36} = 2\sqrt{8{,}64} \approx 5{,}8788$$

— **Contrôle par les coordonnées** : la droite donne $y = \dfrac{4x+5}{3}$; en substituant dans $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ on obtiendrait une équation du second degré de discriminant **strictement positif** — cohérent avec deux points ✓
— **Vérification du calcul de la corde** : la demi-corde vaut $\sqrt{9 - 0{,}36} \approx 2{,}9394$, donc $\ell \approx 5{,}879$ — proche du diamètre 6, ce qui est logique puisque la droite passe presque par le centre ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Les trois cas** : $d > R$ **disjoints** · $d = R$ **tangents** · $d < R$ **sécants**.
— **Cas tangent** : la droite $4x - 3y + c = 0$ serait tangente pour $|-2 + c| = 15$, soit $c = 17$ ou $c = -13$.

Réponse. Sécante ($d = 0{,}6 < 3$), corde de longueur $2\sqrt{8{,}64} \approx 5{,}88$.

Correction de l'exercice 7 – Intersection de deux cercles

— **Soustraction des équations** : $x^2 + y^2 - 16 = 0$ et $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$.
— **Différence** : $-16 - (-12x + 32) = 0$, soit $12x - 48 = 0$ et

$$x = 4$$

— **Substitution** : $16 + y^2 = 16$ donne $y = 0$.
— **Point d'intersection** : $(4\,;0)$ — **unique**.
— **Conclusion** : les cercles sont **tangents extérieurement** en $(4\,;0)$.
— **Contrôle par les centres** : $O(0\,;0)$ et $\Omega(6\,;0)$, distants de 6 ; or $R_1 + R_2 = 4 + 2 = 6$ ✓ — c'est exactement la condition de tangence extérieure.
— **Vérification du point** : $16 + 0 = 16$ ✓ et $(4-6)^2 + 0 = 4$ ✓
— **Autres configurations** : si la distance des centres dépassait 6, les cercles seraient **disjoints** ; si elle était entre $|R_1 - R_2| = 2$ et 6, ils se couperaient en **deux** points.

Réponse. Tangents en $(4\,;0)$ ($\text{distance des centres} = R_1 + R_2 = 6$).

Correction de l'exercice 8 – Angle inscrit

— **Angle droit** : M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, donc $A\hat{M}B = 90°$ et

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

— **Pythagore** : $AB = 10$ (diamètre), donc $AM^2 + BM^2 = 100$.
— **Calcul** : $BM^2 = 100 - 36 = 64$, donc

$$BM = 8$$

— **Contrôle** : le triangle est le triangle 6-8-10, homothétique du 3-4-5 ✓
— **Aire** : $\dfrac{6 \times 8}{2} = 24$.
— **Distance de M à (AB)** : $\dfrac{2 \times 24}{10} = 4{,}8$ — inférieure au rayon 5, ce qui est cohérent ✓
— **Position de M** : en plaçant $A(-5\,;0)$ et $B(5\,;0)$, on trouve $M(-1{,}4\,;4{,}8)$, car $AM^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$ ✓ et $BM^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 40{,}96 + 23{,}04 = 64$ ✓
— **Contrôle du cercle** : $1{,}96 + 23{,}04 = 25$ ✓

Réponse. $BM = 8$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Correction de l'exercice 9 – Optimisation d'un produit scalaire

— **Expression** : avec $M(x\,;y)$,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-x)(4-x) + (-y)(-y) = x^2 - 4x + y^2$$

— **Complétion des carrés** :

$$= (x-2)^2 - 4 + y^2$$

— **Minimum** : atteint pour $x = 2$ et $y = 0$, c'est-à-dire au **milieu** $I(2\,;0)$ de $[AB]$, avec la valeur

$$-4$$

— **Contrôle** : en I, $\overrightarrow{IA}(-2\,;0)$ et $\overrightarrow{IB}(2\,;0)$, donc le produit vaut -4 ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Formule générale** : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = MI^2 - 4$ — d'où le minimum -4 en $M = I$ ✓

— **Contrôles** : en $M(0\,;0) = A$, le produit vaut 0 ✓ ; en $M(2\,;3)$, $4 - 8 + 9 = 5$, et $MI^2 - 4 = 9 - 4 = 5$ ✓

— **Lecture** : le produit est **négatif** exactement à l'intérieur du cercle de diamètre $[AB]$, nul sur le cercle, positif à l'extérieur ✓

Réponse. Minimum -4, atteint au milieu $I(2\,;0)$.

Correction de l'exercice 10 – Cauchy-Schwarz

— **Mise en forme vectorielle** : avec $\vec{u}(1\,;2)$ et $\vec{v}(a\,;b)$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = a + 2b$.

— **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

— **Cauchy-Schwarz** :

$$|a + 2b| = |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$$

— **Cas d'égalité** : les vecteurs doivent être **colinéaires**, soit $b = 2a$.

— **Vérification** : avec $a = 1$ et $b = 2$, le membre de gauche vaut 5 et celui de droite $\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$ ✓ — égalité.

— **Contrôle d'un cas strict** : avec $a = 1$ et $b = 0$, on a $1 \leq \sqrt{5} \approx 2{,}236$ ✓

— **Autre cas strict** : $a = 1$, $b = 1$ donne $3 \leq \sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$ ✓

— **Application** : cette inégalité donne le **maximum** de $a + 2b$ sur le cercle $a^2 + b^2 = 1$; il vaut $\sqrt{5} \approx 2{,}236$, atteint en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,;\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ✓

Réponse. Cauchy-Schwarz avec $\vec{u}(1\,;2)$; égalité si $b = 2a$.

Correction de l'exercice 11 – Hauteur et aire par le produit scalaire

— **Droite** (AB) : $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$, donc un vecteur normal est $(-2\,;4)$, ou $(1\,;-2)$ après simplification.

— **Équation** : $1(x-1) - 2(y-1) = 0$, soit $x - 2y + 1 = 0$.

— **Contrôles** : A donne $1 - 2 + 1 = 0$ ✓ et B donne $5 - 6 + 1 = 0$ ✓

— **Distance de** C :

$$d = \frac{|2 - 12 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4{,}0249$$

— **Longueur** AB : $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$.

— **Aire** :

$$A = \frac{AB \times d}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times \dfrac{9}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

— **Contrôle par le déterminant** : $\dfrac{1}{2}|4\times 5 - 2\times 1| = \dfrac{1}{2}|20 - 2| = 9$ ✓ (avec $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;5)$).

— **Contrôle par le produit scalaire** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 + 10 = 14$, et $A = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{20\times 26 - 196} = \dfrac{1}{2}\sqrt{324} = 9$ ✓

Réponse. $A = 9$ (avec $d = \dfrac{9}{\sqrt{5}} \approx 4{,}02$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Lieu avec un rapport

— **Expression** : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 - 6x + y^2$.
— **Équation** : $x^2 - 6x + y^2 = 5$, soit après complétion

$$(x-3)^2 + y^2 = 14$$

— **Lieu** : le **cercle** de centre $I(3\,;0)$ (milieu de $[AB]$) et de rayon $\sqrt{14} \approx 3{,}7417$.
— **Contrôle par la formule** : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = MI^2 - 9$, donc $MI^2 = 14$ ✓
— **Vérification** : $M\left(3+\sqrt{14}\,;0\right) \approx (6{,}742\,;0)$ donne $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \approx (-6{,}742)(-0{,}742) \approx 5{,}00$ ✓
— **Autre point** : $M\left(3\,;\sqrt{14}\right)$ donne $9 - 18 + 14 = 5$ ✓
— **Généralisation** : le lieu de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est
— un **cercle** de rayon $\sqrt{k+9}$ si $k > -9$;
— le **point** I si $k = -9$;
— l'**ensemble vide** si $k < -9$.
— **Cas** $k = 0$: on retrouve le cercle de diamètre $[AB]$, de rayon 3 ✓

Réponse. Le cercle de centre $(3\,;0)$ et de rayon $\sqrt{14} \approx 3{,}74$.

Correction de l'exercice 13 – Distance minimale à un cercle

— **Distance du point au centre** :

$$OP = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

— **Position** : $10 > 4$, donc P est **extérieur** au cercle.
— **Distance minimale** : $OP - R = 10 - 4 = 6$, atteinte au point du cercle situé **sur** le segment $[OP]$.
— **Point le plus proche** : $\dfrac{4}{10} \times (8\,;6) = (3{,}2\,;2{,}4)$.
— **Contrôle** : $3{,}2^2 + 2{,}4^2 = 10{,}24 + 5{,}76 = 16$ ✓ (sur le cercle) et la distance à P vaut $\sqrt{4{,}8^2 + 3{,}6^2} = \sqrt{23{,}04 + 12{,}96} = \sqrt{36} = 6$ ✓
— **Distance maximale** : $OP + R = 14$, atteinte au point diamétralement opposé, $(-3{,}2\,;-2{,}4)$.
— **Contrôle** : $\sqrt{11{,}2^2 + 8{,}4^2} = \sqrt{125{,}44 + 70{,}56} = \sqrt{196} = 14$ ✓
— **Longueur de la tangente** depuis P : $\sqrt{OP^2 - R^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} \approx 9{,}165$ — utile pour construire les tangentes issues de P.
— **Remarque** : ces formules $OP \pm R$ ne valent que pour un point **extérieur** ; pour un point intérieur, le minimum serait $R - OP$.

Réponse. Minimum 6 (en $(3{,}2\,;2{,}4)$), maximum 14.

Correction de l'exercice 14 – Trapèze et orthogonalité

— **Parallélisme** : $\overrightarrow{AB}(4\,;0)$ et $\overrightarrow{DC}(2\,;0)$ sont **colinéaires**, donc $(AB) \parallel (DC)$ — c'est un trapèze ✓
— **Côtés obliques** : $AD = \|(1\,;2)\| = \sqrt{5}$ et $BC = \|(-1\,;2)\| = \sqrt{5}$ — **égaux**, le trapèze est **isocèle** ✓
— **Diagonales** : $\overrightarrow{AC}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{BD}(-3\,;2)$.
— **Produit scalaire** : $-9 + 4 = -5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Normes** : $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{13} \approx 3{,}6056$ — les diagonales sont **égales**, autre propriété du trapèze isocèle ✓

— **Cosinus** :

$$\cos\theta = \frac{-5}{13} \approx -0{,}38462$$

— **Angle** : $\theta \approx 112{,}62°$; l'angle **aigu** entre les diagonales vaut donc environ $67{,}38°$.

— **Contrôle de symétrie** : l'axe de symétrie est la verticale $x = 2$, et l'on vérifie que A et B sont symétriques, de même que D et C ✓

— **Aire** : $\dfrac{(AB + DC) \times h}{2} = \dfrac{(4+2) \times 2}{2} = 6$.

Réponse. Trapèze isocèle ($AD = BC = \sqrt{5}$) ; angle aigu des diagonales $\approx 67{,}4°$.

Correction de l'exercice 15 – Cercle circonscrit

— **Observation** : $\overrightarrow{AB}(6\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;8)$ donnent $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ — le triangle est **rectangle en** A.

— **Conséquence** : $[BC]$ est un **diamètre** du cercle circonscrit (théorème de l'angle inscrit).

— **Centre** : le milieu de $[BC]$, soit $\Omega(3\,;4)$.

— **Rayon** : $\dfrac{BC}{2}$ avec $BC = \sqrt{36+64} = 10$, donc $R = 5$.

— **Équation** :

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

— **Contrôles** : $A(0\,;0)$ donne $9+16=25$ ✓ ; $B(6\,;0)$ donne $9+16=25$ ✓ ; $C(0\,;8)$ donne $9+16=25$ ✓

— **Méthode générale** (si le triangle n'est pas rectangle) : intersecter deux **médiatrices**. Ici, la médiatrice de $[AB]$ est $x = 3$ et celle de $[AC]$ est $y = 4$ — on retrouve immédiatement $\Omega(3\,;4)$ ✓

— **Aire du triangle** : $\dfrac{6\times 8}{2} = 24$, et l'on peut contrôler la formule $R = \dfrac{abc}{4A} = \dfrac{6\times 8\times 10}{96} = 5$ ✓

Réponse. $\Omega(3\,;4)$ et $R = 5$ (triangle rectangle en A).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : problème complet

a) **Cercle de diamètre** $[AB]$: centre $O(0\,;0)$, rayon 3.

$$x^2 + y^2 = 9$$

b) **Somme des carrés.** Par le théorème de la médiane avec $I = O$:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\times 9 + 18 = 36$$

— **Résultat remarquable** : la somme est **constante**, égale à 36 — indépendante de y ✓

— **Contrôle** : pour $M(0\,;3)$, $MA^2 = 9+9 = 18$ et $MB^2 = 18$, de somme 36 ✓

— Pour $M(3\,;0) = B$, $MA^2 = 36$ et $MB^2 = 0$ ✓

Produit. Le triangle est rectangle en M (angle inscrit dans un demi-cercle), donc $\dfrac{MA\times MB}{2}$ est son aire, elle-même égale à $\dfrac{AB\times y}{2} = 3y$.

$$MA \times MB = 6y$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : pour $M(0\,;3)$, $MA = MB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, donc $MA \times MB = 18 = 6 \times 3$ ✓

— Pour $M\left(\frac{9}{5}\,;\frac{12}{5}\right)$ (sur le cercle car $\frac{81+144}{25} = 9$ ✓) :

$MA^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{576+144}{25} = \frac{720}{25}$ et $MB^2 = \frac{36+144}{25} = \frac{180}{25}$.

— **Produit** : $\sqrt{\frac{720 \times 180}{625}} = \frac{\sqrt{129\,600}}{25} = \frac{360}{25} = 14{,}4$, et $6y = 6 \times 2{,}4 = 14{,}4$ ✓

c) **Aire maximale.** L'aire vaut $3y$, maximale quand y est maximal, soit $y = 3$.

$$M(0\,;3) \qquad A_{\max} = 9$$

— **Contrôle** : le triangle est alors **isocèle rectangle** en M, de cathètes $3\sqrt{2}$ — son aire vaut $\frac{(3\sqrt{2})^2}{2} = 9$ ✓

— **Cohérence avec le produit** : $MA \times MB = 18$, valeur maximale compatible avec $MA^2 + MB^2 = 36$ constant (le produit de deux nombres de somme de carrés fixée est maximal quand ils sont **égaux**) ✓

Réponse. a) $x^2 + y^2 = 9$ · b) $MA^2 + MB^2 = 36$ (constant) et $MA \times MB = 6y$ · c) $M(0\,;3)$, aire 9.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).