

## Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : cercles, lieux de points et optimisation

### Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Équation d'un cercle** de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$  :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec  $c = a^2 + b^2 - R^2$ . Pour revenir au centre et au rayon depuis la forme développée, on **complète les carrés**.

**Cercle de diamètre  $[AB]$  :**

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

**Médiatrice de  $[AB]$  :** ensemble des  $M$  tels que  $MA = MB$ , ou encore

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \quad \text{avec } I \text{ milieu de } [AB]$$

**Lieux classiques.**

| Relation                                            | Lieu                                                  |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ | cercle de diamètre $[AB]$                             |
| $MA = MB$                                           | médiatrice de $[AB]$                                  |
| $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$  | droite passant par $A$ , normale $\overrightarrow{n}$ |
| $MA^2 + MB^2 = k$                                   | cercle de centre le milieu de $[AB]$                  |

**Théorème de la médiane.** Si  $I$  est le milieu de  $[AB]$  :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

**Tangente à un cercle.** La tangente en un point  $T$  du cercle de centre  $\Omega$  est la droite passant par  $T$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{\Omega T}$ . Une droite est tangente au cercle si et seulement si  $d(\Omega, \text{droite}) = R$ .

**Inégalité de Cauchy-Schwarz.**  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ , avec égalité si et seulement si les vecteurs sont **colinéaires**.

#### Correction de l'exercice 1 - Reconnaître un cercle

— **Complétion des carrés :**

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9 \quad y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$

— **Réécriture :**  $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0$ , soit

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

— **Centre :**  $\Omega(3; -2)$  ; **rayon :**  $R = 4$ .

— **Contrôle par un point :**  $(7; -2)$  donne  $49 + 4 - 42 - 8 - 3 = 0$  ✓, et il est bien à la distance 4 de  $\Omega$  ✓

— **Autre point :**  $(3; 2)$  donne  $9 + 4 - 18 + 8 - 3 = 0$  ✓

- **Contrôle par la formule** : dans  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , on a  $-2a = -6$  donc  $a = 3$ , et  $-2b = 4$  donc  $b = -2$  ✓
- **Rayon** :  $R^2 = a^2 + b^2 - c = 9 + 4 + 3 = 16$  ✓
- **Attention** : si  $a^2 + b^2 - c$  était **négatif**, l'équation ne décrirait **aucun** point ; s'il était nul, un **seul** point.

**Réponse.** Centre  $\Omega(3; -2)$ , rayon  $R = 4$ .

### Correction de l'exercice 2 - Cercle de diamètre donné

- **Centre** : le milieu  $\Omega(3; -1)$ .
- **Rayon** :  $\frac{AB}{2}$  avec  $AB = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$ , donc  $R = \frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13} \approx 3,6056$ .
- **Équation** :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

- **Contrôles** : A donne  $4 + 9 = 13$  ✓ et B donne  $4 + 9 = 13$  ✓
- **Vérification par le produit scalaire** :  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$  s'écrit
 
$$(1 - x)(5 - x) + (2 - y)(-4 - y) = 5 - 6x + x^2 - 8 + 2y - 4y + y^2$$
- **Développement** :  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ .
- **Contrôle de l'équivalence** :
 
$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 13 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 - 13 = x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 \quad \checkmark$$
- **Point de contrôle supplémentaire** :  $(3; -1 + \sqrt{13})$  est sur le cercle, et l'angle en ce point est droit par le théorème de l'angle inscrit ✓

**Réponse.**  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$ .

### Correction de l'exercice 3 - Lieu de points : médiatrice

- **Nature du lieu** : c'est la **médiatrice** de  $[AB]$ .
- **Par le calcul** :  $MA^2 = MB^2$  s'écrit
 
$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - 5)^2 + (y - 1)^2$$
- **Développement** :  $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$ .
- **Simplification** :  $2x + 10 - 6y = -10x + 26 - 2y$ , soit  $12x - 4y - 16 = 0$ , donc
 
$$3x - y - 4 = 0$$
- **Contrôle par le milieu** :  $I(2; 2)$  doit appartenir à la médiatrice :  $6 - 2 - 4 = 0$  ✓
- **Contrôle du vecteur normal** :  $\overline{AB}(6; -2)$ , proportionnel à  $(3; -1)$  — qui est bien le vecteur normal lu dans l'équation ✓
- **Vérification sur un point** :  $(1; -1)$  vérifie  $3 + 1 - 4 = 0$  ; et  $MA^2 = 4 + 16 = 20$ ,  $MB^2 = 16 + 4 = 20$  ✓
- **Méthode la plus rapide** : passer directement par le milieu et le vecteur normal  $\overline{AB}$ , sans développer les carrés.

**Réponse.** La médiatrice de  $[AB]$  :  $3x - y - 4 = 0$ .

### Correction de l'exercice 4 - Lieu de points : somme de carrés

- **Théorème de la médiane** avec  $I(2; 0)$  milieu de  $[AB]$  et  $AB = 4$  :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{16}{2} = 2MI^2 + 8$$

— **Équation** :  $2MI^2 + 8 = 40$ , donc  $MI^2 = 16$  et  $MI = 4$ .

— **Lieu** : le **cercle** de centre  $I(2; 0)$  et de rayon 4 :

$$(x - 2)^2 + y^2 = 16$$

— **Contrôle direct** : prenons  $M(6; 0)$ , sur ce cercle. Alors  $MA^2 = 36$  et  $MB^2 = 4$ , de somme 40 ✓

— **Autre point** :  $M(2; 4)$  donne  $MA^2 = 4 + 16 = 20$  et  $MB^2 = 4 + 16 = 20$ , de somme 40 ✓

— **Vérification par le calcul brut** :  $x^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 = 40$  donne  $2x^2 - 8x + 16 + 2y^2 = 40$ , soit  $x^2 - 4x + y^2 = 12$  et  $(x - 2)^2 + y^2 = 16$  ✓

— **Condition d'existence** : il faut  $MI^2 \geq 0$ , donc  $MA^2 + MB^2 \geq 8$  — la valeur 8 correspond au seul point  $I$ .

**Réponse.** Le cercle de centre  $I(2; 0)$  et de rayon 4.

### Correction de l'exercice 5 - Tangente à un cercle

— **Vérification que  $T$  est sur le cercle** :  $9 + 16 = 25$  ✓

— **Vecteur normal** :  $\overrightarrow{OT}(3; 4)$ , où  $O$  est le centre.

— **Équation** :  $3(x - 3) + 4(y - 4) = 0$ , soit

$$3x + 4y - 25 = 0$$

— **Contrôle du point** :  $9 + 16 - 25 = 0$  ✓

— **Contrôle de la tangence** : la distance du centre  $O$  à la droite vaut

$$\frac{|0 + 0 - 25|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5 = R$$

— La distance du centre égale le rayon : la droite est bien **tangente** ✓

— **Forme générale** : pour le cercle  $x^2 + y^2 = R^2$ , la tangente en  $(x_0; y_0)$  est  $x_0x + y_0y = R^2$  ✓ — ici  $3x + 4y = 25$ .

— **Autre point de la tangente** :  $(7; 1)$  vérifie  $21 + 4 - 25 = 0$  ✓, et  $O(7; 1)$  est à distance  $\sqrt{50} \approx 7,07 > 5$  du centre — ce point est **extérieur** au cercle, comme tout point de la tangente sauf  $T$  ✓

**Réponse.**  $3x + 4y - 25 = 0$ .

### Correction de l'exercice 6 - Droite et cercle : position relative

— **Distance du centre à la droite** :

$$d(\Omega, d) = \frac{|4 - 6 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

— **Comparaison** :  $0,6 < 3$ , donc la droite est **sécante** — elle coupe le cercle en **deux points**.

— **Longueur de la corde** :

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - 0,36} = 2\sqrt{8,64} \approx 5,8788$$

— **Contrôle par les coordonnées** : la droite donne  $y = \frac{4x + 5}{3}$  ; en substituant dans  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  on obtiendrait une équation du second degré de discriminant **strictement positif** — cohérent avec deux points ✓

— **Vérification du calcul de la corde** : la demi-corde vaut  $\sqrt{9 - 0,36} = 2,9394$ , donc  $\ell \approx 5,879$  — proche du diamètre 6, ce qui est logique puisque la droite passe presque par le centre ✓

- **Les trois cas** :  $d > R$  **disjoints** ·  $d = R$  **tangents** ·  $d < R$  **sécants**.
- **Cas tangent** : la droite  $4x - 3y + c = 0$  serait tangente pour  $|-2 + c| = 15$ , soit  $c = 17$  ou  $c = -13$ .

**Réponse.** Sécante ( $d = 0,6 < 3$ ), corde de longueur  $2\sqrt{8,64} \approx 5,88$ .

### Correction de l'exercice 7 - Intersection de deux cercles

- **Soustraction des équations** :  $x^2 + y^2 - 16 = 0$  et  $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$ .
- **Différence** :  $-16 - (-12x + 32) = 0$ , soit  $12x - 48 = 0$  et  

$$x = 4$$
- **Substitution** :  $16 + y^2 = 16$  donne  $y = 0$ .
- **Point d'intersection** :  $(4; 0)$  — **unique**.
- **Conclusion** : les cercles sont **tangents extérieurement** en  $(4; 0)$ .
- **Contrôle par les centres** :  $O(0; 0)$  et  $\Omega(6; 0)$ , distants de 6 ; or  $R_1 + R_2 = 4 + 2 = 6$  ✓  
 — c'est exactement la condition de tangence extérieure.
- **Vérification du point** :  $16 + 0 = 16$  ✓ et  $(4 - 6)^2 + 0 = 4$  ✓
- **Autres configurations** : si la distance des centres dépassait 6, les cercles seraient **disjoints** ; si elle était entre  $|R_1 - R_2| = 2$  et 6, ils se couperaient en **deux** points.

**Réponse.** Tangents en  $(4; 0)$  (distance des centres =  $R_1 + R_2 = 6$ ).

### Correction de l'exercice 8 - Angle inscrit

- **Angle droit** :  $M$  est sur le cercle de diamètre  $[AB]$ , donc  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  et  

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$
- **Pythagore** :  $AB = 10$  (diamètre), donc  $AM^2 + BM^2 = 100$ .
- **Calcul** :  $BM^2 = 100 - 36 = 64$ , donc  

$$BM = 8$$
- **Contrôle** : le triangle est le triangle 6-8-10, homothétique du 3-4-5 ✓
- **Aire** :  $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ .
- **Distance de  $M$  à  $(AB)$**  :  $\frac{2 \times 24}{10} = 4,8$  — inférieure au rayon 5, ce qui est cohérent ✓
- **Position de  $M$**  : en plaçant  $A(-5; 0)$  et  $B(5; 0)$ , on trouve  $M(-1,4; 4,8)$ , car  
 $AM^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$  ✓ et  $BM^2 = 6,4^2 + 4,8^2 = 40,96 + 23,04 = 64$  ✓
- **Contrôle du cercle** :  $1,96 + 23,04 = 25$  ✓

**Réponse.**  $BM = 8$  et  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

### Correction de l'exercice 9 - Optimisation d'un produit scalaire

- **Expression** : avec  $M(x; y)$ ,  

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-x)(4 - x) + (-y)(-y) = x^2 - 4x + y^2$$
- **Complétion des carrés** :  

$$= (x - 2)^2 - 4 + y^2$$
- **Minimum** : atteint pour  $x = 2$  et  $y = 0$ , c'est-à-dire au **milieu**  $I(2; 0)$  de  $[AB]$ , avec la valeur  

$$-4$$
- **Contrôle** : en  $I$ ,  $\overrightarrow{IA}(-2; 0)$  et  $\overrightarrow{IB}(2; 0)$ , donc le produit vaut  $-4$  ✓

- **Formule générale** :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - 4$  — d'où le minimum  $-4$  en  $M = I$  ✓
- **Contrôles** : en  $M(0; 0) = A$ , le produit vaut  $0$  ✓ ; en  $M(2; 3)$ ,  $4 - 8 + 9 = 5$ , et  $MI^2 - 4 = 9 - 4 = 5$  ✓
- **Lecture** : le produit est **négatif** exactement à l'intérieur du cercle de diamètre  $[AB]$ , nul sur le cercle, positif à l'extérieur ✓

**Réponse.** Minimum  $-4$ , atteint au milieu  $I(2; 0)$ .

### Correction de l'exercice 10 - Cauchy-Schwarz

- **Mise en forme vectorielle** : avec  $\vec{u}(1; 2)$  et  $\vec{v}(a; b)$ , on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a + 2b$ .
- **Normes** :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$  et  $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- **Cauchy-Schwarz** :  

$$|a + 2b| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = \sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}$$
- **Cas d'égalité** : les vecteurs doivent être **colinéaires**, soit  $b = 2a$ .
- **Vérification** : avec  $a = 1$  et  $b = 2$ , le membre de gauche vaut  $5$  et celui de droite  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$  ✓ — égalité.
- **Contrôle d'un cas strict** : avec  $a = 1$  et  $b = 0$ , on a  $1 \leq \sqrt{5} \approx 2,236$  ✓
- **Autre cas strict** :  $a = 1$ ,  $b = 1$  donne  $3 \leq \sqrt{5} \sqrt{2} = \sqrt{10} \approx 3,162$  ✓
- **Application** : cette inégalité donne le **maximum** de  $a + 2b$  sur le cercle  $a^2 + b^2 = 1$  ; il vaut  $\sqrt{5} \approx 2,236$ , atteint en  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  ✓

**Réponse.** Cauchy-Schwarz avec  $\vec{u}(1; 2)$  ; égalité si  $b = 2a$ .

### Correction de l'exercice 11 - Hauteur et aire par le produit scalaire

- **Droite (AB)** :  $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ , donc un vecteur normal est  $(-2; 4)$ , ou  $(1; -2)$  après simplification.
- **Équation** :  $1(x - 1) - 2(y - 1) = 0$ , soit  $x - 2y + 1 = 0$ .
- **Contrôles** :  $A$  donne  $1 - 2 + 1 = 0$  ✓ et  $B$  donne  $5 - 6 + 1 = 0$  ✓
- **Distance de C** :  

$$d = \frac{|2 - 12 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,0249$$
- **Longueur AB** :  $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,4721$ .
- **Aire** :  

$$A = \frac{AB \times d}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times \frac{9}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$
- **Contrôle par le déterminant** :  $\frac{1}{2}|4 \times 5 - 2 \times 1| = \frac{1}{2}|20 - 2| = 9$  ✓ (avec  $\overrightarrow{AB}(4; 2)$  et  $\overrightarrow{AC}(1; 5)$ ).
- **Contrôle par le produit scalaire** :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 10 = 14$ , et  

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20 \times 26 - 196} = \frac{1}{2} \sqrt{324} = 9$$
 ✓

**Réponse.**  $A = 9$  (avec  $d = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,02$ ).

## Correction de l'exercice 12 - Lieu avec un rapport

- **Expression** :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 - 6x + y^2$ .
- **Équation** :  $x^2 - 6x + y^2 = 5$ , soit après complétion
 
$$(x - 3)^2 + y^2 = 14$$
- **Lieu** : le **cercle** de centre  $I(3; 0)$  (milieu de  $[AB]$ ) et de rayon  $\sqrt{14} \approx 3,7417$ .
- **Contrôle par la formule** :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - 9$ , donc  $MI^2 = 14$  ✓
- **Vérification** :  $M(3 + \sqrt{14}; 0) \approx (6,742; 0)$  donne  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \approx (-6,742)(-0,742) \approx 5,00$  ✓
- **Autre point** :  $M(3; \sqrt{14})$  donne  $9 - 18 + 14 = 5$  ✓
- **Généralisation** : le lieu de  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$  est
  - un **cercle** de rayon  $\sqrt{k + 9}$  si  $k > -9$  ;
  - le **point**  $I$  si  $k = -9$  ;
  - l'**ensemble vide** si  $k < -9$ .
- **Cas**  $k = 0$  : on retrouve le cercle de diamètre  $[AB]$ , de rayon 3 ✓

**Réponse.** Le cercle de centre  $(3; 0)$  et de rayon  $\sqrt{14} \approx 3,74$ .

## Correction de l'exercice 13 - Distance minimale à un cercle

- **Distance du point au centre** :
 
$$OP = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$
- **Position** :  $10 > 4$ , donc  $P$  est **extérieur** au cercle.
- **Distance minimale** :  $OP - R = 10 - 4 = 6$ , atteinte au point du cercle situé **sur** le segment  $[OP]$ .
- **Point le plus proche** :  $\frac{4}{10} \times (8; 6) = (3,2; 2,4)$ .
- **Contrôle** :  $3,2^2 + 2,4^2 = 10,24 + 5,76 = 16$  ✓ (sur le cercle) et la distance à  $P$  vaut  $\sqrt{4,8^2 + 3,6^2} = \sqrt{23,04 + 12,96} = \sqrt{36} = 6$  ✓
- **Distance maximale** :  $OP + R = 14$ , atteinte au point diamétralement opposé,  $(-3,2; -2,4)$ .
- **Contrôle** :  $\sqrt{11,2^2 + 8,4^2} = \sqrt{125,44 + 70,56} = \sqrt{196} = 14$  ✓
- **Longueur de la tangente** depuis  $P$  :  $\sqrt{OP^2 - R^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} \approx 9,165$  — utile pour construire les tangentes issues de  $P$ .
- **Remarque** : ces formules  $OP \pm R$  ne valent que pour un point **extérieur** ; pour un point intérieur, le minimum serait  $R - OP$ .

**Réponse.** Minimum 6 (en  $(3,2; 2,4)$ ), maximum 14.

## Correction de l'exercice 14 - Trapèze et orthogonalité

- **Parallélisme** :  $\overrightarrow{AB}(4; 0)$  et  $\overrightarrow{DC}(2; 0)$  sont **colinéaires**, donc  $(AB) \parallel (DC)$  — c'est un trapèze ✓
- **Côtés obliques** :  $AD = \|(1; 2)\| = \sqrt{5}$  et  $BC = \|(-1; 2)\| = \sqrt{5}$  — **égaux**, le trapèze est **isocèle** ✓
- **Diagonales** :  $\overrightarrow{AC}(3; 2)$  et  $\overrightarrow{BD}(-3; 2)$ .
- **Produit scalaire** :  $-9 + 4 = -5$ .

- **Normes** :  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{13} \approx 3,6056$  — les diagonales sont **égales**, autre propriété du trapèze isocèle ✓
- **Cosinus** :  

$$\cos \theta = \frac{-5}{13} \approx -0,38462$$
- **Angle** :  $\theta \approx 112,62^\circ$  ; l'angle **aigu** entre les diagonales vaut donc environ  $67,38^\circ$ .
- **Contrôle de symétrie** : l'axe de symétrie est la verticale  $x = 2$ , et l'on vérifie que  $A$  et  $B$  sont symétriques, de même que  $D$  et  $C$  ✓
- **Aire** :  $\frac{(AB + DC) \times h}{2} = \frac{(4 + 2) \times 2}{2} = 6$ .

**Réponse.** Trapèze isocèle ( $AD = BC = \sqrt{5}$ ) ; angle aigu des diagonales  $\approx 67,4^\circ$ .

### Correction de l'exercice 15 - Cercle circonscrit

- **Observation** :  $\overrightarrow{AB}(6; 0)$  et  $\overrightarrow{AC}(0; 8)$  donnent  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  — le triangle est **rectangle en A**.
- **Conséquence** :  $[BC]$  est un **diamètre** du cercle circonscrit (théorème de l'angle inscrit).
- **Centre** : le milieu de  $[BC]$ , soit  $\Omega(3; 4)$ .
- **Rayon** :  $\frac{BC}{2}$  avec  $BC = \sqrt{36 + 64} = 10$ , donc  $R = 5$ .
- **Équation** :

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

- **Contrôles** :  $A(0; 0)$  donne  $9 + 16 = 25$  ✓ ;  $B(6; 0)$  donne  $9 + 16 = 25$  ✓ ;  $C(0; 8)$  donne  $9 + 16 = 25$  ✓
- **Méthode générale** (si le triangle n'est pas rectangle) : intersecter deux **médiatrices**. Ici, la médiatrice de  $[AB]$  est  $x = 3$  et celle de  $[AC]$  est  $y = 4$  — on retrouve immédiatement  $\Omega(3; 4)$  ✓
- **Aire du triangle** :  $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ , et l'on peut contrôler la formule  

$$R = \frac{abc}{4A} = \frac{6 \times 8 \times 10}{96} = 5 \quad \checkmark$$

**Réponse.**  $\Omega(3; 4)$  et  $R = 5$  (triangle rectangle en A).

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : problème complet

- a) **Cercle de diamètre**  $[AB]$  : centre  $O(0; 0)$ , rayon 3.

$$x^2 + y^2 = 9$$

- b) **Somme des carrés**. Par le théorème de la médiane avec  $I = O$  :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 \times 9 + 18 = 36$$

- **Résultat remarquable** : la somme est **constante**, égale à 36 — indépendante de  $y$  ✓
- **Contrôle** : pour  $M(0; 3)$ ,  $MA^2 = 9 + 9 = 18$  et  $MB^2 = 18$ , de somme 36 ✓
- Pour  $M(3; 0) = B$ ,  $MA^2 = 36$  et  $MB^2 = 0$  ✓

**Produit.** Le triangle est rectangle en  $M$  (angle inscrit dans un demi-cercle), donc

$$\frac{MA \times MB}{2} \text{ est son aire, elle-même égale à } \frac{AB \times y}{2} = 3y.$$

$$MA \times MB = 6y$$

- **Contrôle** : pour  $M(0; 3)$ ,  $MA = MB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ , donc  $MA \times MB = 18 = 6 \times 3$  ✓
- Pour  $M\left(\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right)$  (sur le cercle car  $\frac{81+144}{25} = 9$  ✓) :  
 $MA^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{576+144}{25} = \frac{720}{25}$  et  $MB^2 = \frac{36+144}{25} = \frac{180}{25}$ .
- **Produit** :  $\sqrt{\frac{720 \times 180}{625}} = \frac{\sqrt{129600}}{25} = \frac{360}{25} = 14,4$ , et  $6y = 6 \times 2,4 = 14,4$  ✓

c) **Aire maximale.** L'aire vaut  $3y$ , maximale quand  $y$  est maximal, soit  $y = 3$ .

$$M(0; 3) \quad A_{\max} = 9$$

- **Contrôle** : le triangle est alors **isocèle rectangle** en  $M$ , de cathètes  $3\sqrt{2}$  — son aire vaut  $\frac{(3\sqrt{2})^2}{2} = 9$  ✓
- **Cohérence avec le produit** :  $MA \times MB = 18$ , valeur maximale compatible avec  $MA^2 + MB^2 = 36$  constant (le produit de deux nombres de somme de carrés fixée est maximal quand ils sont **égaux**) ✓

**Réponse.** a)  $x^2 + y^2 = 9$  · b)  $MA^2 + MB^2 = 36$  (constant) et  $MA \times MB = 6y$  · c)  $M(0; 3)$ , aire 9.