

Plaquette 4 - Les trois expressions du produit scalaire et le calcul d'angles

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois expressions. Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad (\text{coordonnées, repère orthonormé})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad (\text{normes et angle})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad (\text{par les normes seules})$$

Projection orthogonale. Si H est le projeté de C sur (AB) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$$

avec le signe $+$ si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens, $-$ sinon.

Propriétés.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Identités remarquables vectorielles.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Norme et distance. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Angle. $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ — le signe du produit scalaire donne immédiatement si l'angle est **aigu** (> 0), **droit** ($= 0$) ou **obtus** (< 0).

Correction de l'exercice 1 - Produit scalaire par coordonnées

— **Produit scalaire** : $3 \times 1 + (-2) \times 4 = 3 - 8 = -5$.

— **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,6056$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \approx 4,1231$.

— **Cosinus** :

$$\cos \theta = \frac{-5}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \frac{-5}{\sqrt{221}} \approx -0,33634$$

— **Angle** : $\theta \approx 109,65^\circ$.

— **Signe** : le produit scalaire est **négatif**, donc l'angle est **obtus** ✓ — cohérent avec $109,65^\circ > 90^\circ$.

— **Contrôle** : $\sqrt{221} \approx 14,8661$, et $\sqrt{13} \times \sqrt{17} \approx 3,6056 \times 4,1231 \approx 14,8661$ ✓

— **Contrôle par la troisième expression** : $\vec{u} - \vec{v} = (2; -6)$, de norme au carré $4 + 36 = 40$.

— $\frac{1}{2}(13 + 17 - 40) = \frac{-10}{2} = -5$ ✓ — même valeur.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$; $\theta \approx 109,7^\circ$ (angle obtus).

Correction de l'exercice 2 - Orthogonalité et paramètre

— **Condition** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, soit

$$2(m - 1) + 3m = 0$$

— **Résolution** : $2m - 2 + 3m = 0$, donc $5m = 2$ et

$$m = 0,4$$

— **Vérification** : $\vec{u}(2; 0,4)$ et $\vec{v}(-0,6; 3)$, donc $2 \times (-0,6) + 0,4 \times 3 = -1,2 + 1,2 = 0 \checkmark$

— **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{4,16} \approx 2,0396$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{0,36 + 9} = \sqrt{9,36} \approx 3,0594$.

— **Contrôle géométrique** : le coefficient directeur de $\vec{u}$ vaut $\frac{0,4}{2} = 0,2$, celui de $\vec{v}$ vaut $\frac{3}{-0,6} = -5$, et $0,2 \times (-5) = -1 \checkmark$ — le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut bien -1 .

— **Unicité** : l'équation est du **premier degré** en m , donc il y a exactement une solution.

Réponse. $m = 0,4$.

Correction de l'exercice 3 - Produit scalaire par les normes

— **Produit scalaire** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 \times \cos 60^\circ = 15 \times \frac{1}{2} = 7,5$$

— **Norme de la somme** :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 25 + 2 \times 7,5 + 9 = 25 + 15 + 9 = 49$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$$

— **Contrôle par la différence** : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 25 - 15 + 9 = 19$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{19} \approx 4,3589$.

— **Contrôle de l'identité du parallélogramme** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 49 + 19 = 68$, et $2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) = 2(25 + 9) = 68 \checkmark$

— **Encadrement attendu** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ doit être compris entre $|5 - 3| = 2$ et $5 + 3 = 8$; on trouve 7 $\checkmark$

— **Interprétation** : l'angle de 60° est plutôt fermé, donc la somme est proche du maximum 8 $\checkmark$

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7,5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$.

Correction de l'exercice 4 - Angle d'un triangle

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB}(3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(1; 4)$.

— **Produit scalaire** : $3 + 4 = 7$.

— **Normes** : $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10} \approx 3,1623$ et $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{17} \approx 4,1231$.

— **Cosinus** :

$$\cos \hat{BAC} = \frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{170}} \approx 0,53686$$

— **Angle** : $\hat{BAC} \approx 57,53^\circ$.

— **Contrôle par Al-Kashi** : $BC = |\overrightarrow{BC}| = \|(-2; 3)\| = \sqrt{13}$.

— $BC^2 = 13$ et $AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \cos \hat{BAC} = 10 + 17 - 2 \times 7 = 27 - 14 = 13 \checkmark$

— **Signe** : le produit scalaire est positif, donc l'angle est **aigu** $\checkmark$

- **Les autres angles** : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3)(-2) + (-1)(3) = 6 - 3 = 3 > 0$, également aigu ; le triangle est **acutangle**.

Réponse. $\hat{BAC} \approx 57,5^\circ$.

Correction de l'exercice 5 - Triangle rectangle

- **Test en A** : $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(1; -2)$, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 4 = 0$$

- **Conclusion** : le triangle est **rectangle en A** ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $AB^2 = 20$, $AC^2 = 5$ et $BC^2 = \|(-3; -4)\|^2 = 9 + 16 = 25$.
- $AB^2 + AC^2 = 20 + 5 = 25 = BC^2$ ✓
- **Longueurs** : $AB = 2\sqrt{5} \approx 4,4721$, $AC = \sqrt{5} \approx 2,2361$ et $BC = 5$ exactement.
- **Aire** : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- **Contrôle des autres angles** : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4)(-3) + (-2)(-4) = 12 + 8 = 20 \neq 0$ ✓ (pas droit en B).
- **Remarque** : $AB = 2AC$, donc le triangle est rectangle avec des cathètes dans le rapport 1 : 2 — l'angle en B vaut $\arctan \frac{1}{2} \approx 26,57^\circ$ et celui en C environ $63,43^\circ$.

Réponse. Rectangle en A ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$).

Correction de l'exercice 6 - Projection orthogonale

- **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 \times \cos 45^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \approx 16,971$$

- **Par la projection** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ (même sens car l'angle est aigu), donc

$$AH = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$$

- **Contrôle direct** : dans le triangle rectangle AHC , $AH = AC \cos 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ✓
- **Hauteur** : $CH = AC \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$ également — le triangle AHC est **isocèle rectangle**, ce qui est attendu pour 45° ✓
- **Aire du triangle** : $\frac{AB \times CH}{2} = \frac{6 \times 2\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8,4853$.
- **Contrôle par l'autre formule d'aire** : $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 45^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ ✓
- **Position de H** : $AH \approx 2,83 < AB = 6$, donc H est bien **à l'intérieur** du segment $[AB]$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12\sqrt{2} \approx 16,97$ et $AH = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Correction de l'exercice 7 - Ensemble de points

- **Traduction** : l'angle $\hat{AMB}$ est **droit**, donc M appartient au **cercle de diamètre** $[AB]$.
- **Centre** : le milieu I de $[AB]$, soit $I(1; 0)$.
- **Rayon** : $\frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
- **Équation** :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9$$

- **Vérification par le calcul** : $\overrightarrow{MA}(-2-x; -y)$ et $\overrightarrow{MB}(4-x; -y)$, donc le produit scalaire vaut

$$(-2-x)(4-x) + y^2 = -8 + 2x - 4x + x^2 + y^2 = x^2 - 2x - 8 + y^2$$

- **Équation obtenue** : $x^2 - 2x + y^2 = 8$, soit $(x-1)^2 + y^2 = 9$ ✓ — identique.
- **Contrôles** : $A(-2; 0)$ vérifie $9 = 9$ ✓ et $B(4; 0)$ aussi ✓ — les extrémités du diamètre appartiennent au cercle.
- **Point du sommet** : $(1; 3)$ vérifie l'équation ; et $\overrightarrow{MA}(-3; -3) \cdot \overrightarrow{MB}(3; -3) = -9 + 9 = 0$ ✓
- **À retenir** : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ caractérise **toujours** le cercle de diamètre $[AB]$.

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

Correction de l'exercice 8 - Longueur d'une médiane

- **Expression de la médiane** : I est le milieu de $[BC]$, donc

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

- **Carré de la norme** :

$$AI^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2) = \frac{1}{4}(25 + 20 + 49) = \frac{94}{4} = 23,5$$

- **Longueur** : $AI = \sqrt{23,5} \approx 4,8477$.
- **Contrôle par le théorème de la médiane** : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
- **Calcul de BC** : $BC^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = 25 - 20 + 49 = 54$.
- **Vérification** : $2 \times 23,5 + \frac{54}{2} = 47 + 27 = 74 = 25 + 49$ ✓
- **Cohérence géométrique** : $BC = \sqrt{54} \approx 7,348$, et la médiane 4,85 est bien inférieure à la demi-somme $\frac{5+7}{2} = 6$ ✓
- **Angle en A** : $\cos \hat{BAC} = \frac{10}{35} \approx 0,2857$, soit environ $73,4^\circ$.

Réponse. $AI = \sqrt{23,5} \approx 4,85$.

Correction de l'exercice 9 - Développer une expression vectorielle

- **Développement par bilinéarité** :

$$3\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 6\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{v}$$

- **Regroupement** (en utilisant $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$) :

$$= 3\|\vec{u}\|^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$$

- **Application numérique** avec $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$:

$$3 \times 4 + 5 \times 1 - 2 \times 9 = 12 + 5 - 18 = -1$$

- **Contrôle par coordonnées** : prenons $\vec{u}(2; 0)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ — alors $\|\vec{v}\|^2 = \frac{1+35}{4} = 9$ ✓ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ ✓

- $\vec{u} + 2\vec{v} = \left(3; \sqrt{35}\right)$ et $3\vec{u} - \vec{v} = \left(\frac{11}{2}; -\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$.

- **Produit** : $3 \times \frac{11}{2} - \frac{35}{2} = \frac{33-35}{2} = -1$ ✓

- **Réflexe** : le produit scalaire se développe **exactement comme un produit de nombres**, à condition de se souvenir que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Réponse. $3\|\vec{u}\|^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$.

Correction de l'exercice 10 - Vecteur orthogonal

- **Vecteur orthogonal** : on échange les coordonnées et on change un signe : $\vec{n}(3; 4)$.
- **Contrôle** : $4 \times 3 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0 \checkmark$
- **Norme** : $\|\vec{n}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$.
- **Vecteur unitaire** :

$$\vec{w} = \frac{1}{5}\vec{n} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) = (0,6; 0,8)$$

- **Contrôles** : $\|\vec{w}\| = \sqrt{0,36 + 0,64} = 1 \checkmark$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2,4 - 2,4 = 0 \checkmark$
- **Second vecteur unitaire** : l'opposé $(-0,6; -0,8)$ convient également — il y a exactement **deux** solutions.
- **Règle générale** : à $\vec{u}(a; b)$ on associe $(-b; a)$ ou $(b; -a)$, puis on divise par $\sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Au passage** : $\|\vec{u}\| = 5$ aussi — le triplet 3-4-5 est à l'œuvre.

Réponse. $\vec{w}(0,6; 0,8)$ (ou son opposé).

Correction de l'exercice 11 - Al-Kashi

- **Al-Kashi** : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \cos \hat{BAC}$, soit

$$49 = 64 + 25 - 80 \cos \hat{BAC} = 89 - 80 \cos \hat{BAC}$$

- **Résolution** : $80 \cos \hat{BAC} = 40$, donc

$$\cos \hat{BAC} = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \hat{BAC} = 60^\circ$$

- **Aire** :

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17,321$$

- **Contrôle par la formule de Héron** : $p = \frac{8+5+7}{2} = 10$, et

$$A = \sqrt{10 \times 2 \times 5 \times 3} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

- **Les deux méthodes concordent** $\checkmark$

- **Produit scalaire** : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 40 \times \frac{1}{2} = 20$.

- **Contrôle par la troisième expression** : $\frac{1}{2}(64 + 25 - 49) = \frac{40}{2} = 20 \checkmark$

- **Cohérence** : l'angle de 60° n'est **pas** le plus grand du triangle, puisque le plus grand côté est $AB = 8$, opposé à $\hat{ACB}$.

Réponse. $\cos \hat{BAC} = \frac{1}{2}$ (60°) et $A = 10\sqrt{3} \approx 17,32$.

Correction de l'exercice 12 - Hauteur d'un triangle

- **Observation** : (AB) est l'axe des abscisses, donc le projeté de C est immédiat.
- **Pied de la hauteur** : $H(2; 0)$.
- **Longueur** : $CH = 4$.
- **Vérification par le produit scalaire** : $\vec{CH}(0; -4)$ et $\vec{AB}(6; 0)$, donc $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \checkmark$

- **Contrôle par la projection** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 2 + 0 \times 4 = 12$, et $AB \times AH = 6 \times 2 = 12$ ✓
- **Aire** : $\frac{AB \times CH}{2} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$.
- **Contrôle de l'aire par le déterminant** : $\frac{1}{2} |x_{AY_B} - x_{BY_A} + \dots|$ — plus simplement, $\frac{1}{2} |6 \times 4 - 0 \times 2| = 12$ ✓
- **Angles** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 > 0$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6)(-4) + 0 = 24 > 0$ — les deux angles à la base sont aigus, donc H est bien **entre** A et B ✓

Réponse. $H(2; 0)$ et $CH = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Équation d'une droite par vecteur normal

- **Caractérisation** : $M(x; y)$ appartient à la droite si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- **Traduction** :

$$3(x - 2) + 5(y + 1) = 0$$
- **Développement** : $3x - 6 + 5y + 5 = 0$, soit

$$3x + 5y - 1 = 0$$
- **Vérification** : A donne $6 - 5 - 1 = 0$ ✓
- **Autre point** : $(2 - 5; -1 + 3) = (-3; 2)$, obtenu en suivant un vecteur directeur $(-5; 3)$: $-9 + 10 - 1 = 0$ ✓
- **Contrôle du vecteur directeur** : $(-5; 3) \cdot (3; 5) = -15 + 15 = 0$ ✓ — il est bien orthogonal au normal.
- **Règle générale** : dans l'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $(a; b)$ est **normal** et $(-b; a)$ est **directeur**.
- **Coefficient directeur** : $-\frac{a}{b} = -\frac{3}{5} = -0,6$, cohérent avec le vecteur directeur $\frac{3}{-5}$ ✓

Réponse. $3x + 5y - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 14 - Distance d'un point à une droite

- **Formule** :

$$d(P, d) = \frac{|3 \times 4 - 4 \times 3 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|12 - 12 + 2|}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$
- **Vérification par le projeté** : $\vec{n}(3; -4)$, de norme 5. On cherche t tel que $P + t\vec{n} \in d$:
- $3(4 + 3t) - 4(3 - 4t) + 2 = 12 + 9t - 12 + 16t + 2 = 2 + 25t = 0$, donc $t = -\frac{2}{25} = -0,08$.
- **Projeté** : $H(4 - 0,24; 3 + 0,32) = H(3,76; 3,32)$.
- **Contrôle** : $3 \times 3,76 - 4 \times 3,32 + 2 = 11,28 - 13,28 + 2 = 0$ ✓
- **Distance** : $|\overrightarrow{PH}| = |t| \times \|\vec{n}\| = 0,08 \times 5 = 0,4$ ✓
- **Interprétation** : P est très **proche** de la droite — le numérateur $|2|$ est petit devant la norme 5.
- **Côté de la droite** : $3x_P - 4y_P + 2 = 2 > 0$; le point $(0; 0)$ donne $2 > 0$ également, donc P et l'origine sont du **même côté** ✓

Réponse. $d(P, d) = 0,4$, avec $H(3,76; 3,32)$.

Correction de l'exercice 15 - Losange et diagonales

- **Développement** :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

- **Conclusion** : si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, l'expression est **nulle**, donc $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont **orthogonaux** ✓
- **Interprétation** : dans un parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les diagonales sont $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.
- **Propriété retrouvée** : les diagonales d'un **losange** (parallélogramme à côtés égaux) sont **perpendiculaires** ✓
- **Vérification numérique** : avec $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(5; 0)$, tous deux de norme 5 :
- $\vec{u} + \vec{v} = (8; 4)$ et $\vec{u} - \vec{v} = (-2; 4)$.
- **Produit** : $-16 + 16 = 0$ ✓
- **Réciproque** : si les diagonales sont perpendiculaires, alors $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, donc les côtés sont égaux — c'est bien un losange. L'équivalence est **complète**.

Réponse. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$: diagonales d'un losange perpendiculaires.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : orthocentre

a) **Hauteur issue de A** : elle est perpendiculaire à (BC) , donc admet $\overrightarrow{BC}(-3; 3)$ comme vecteur normal — ou plus simplement $(-1; 1)$.

- **Équation** : $-1(x - 0) + 1(y - 0) = 0$, soit
$$y = x$$

b) **Hauteur issue de B** : perpendiculaire à (AC) , de vecteur normal $\overrightarrow{AC}(1; 3)$.

- **Équation** : $1(x - 4) + 3(y - 0) = 0$, soit
$$x + 3y - 4 = 0$$

c) **Intersection.** En substituant $y = x$: $x + 3x - 4 = 0$, donc $4x = 4$ et $x = 1$.

$$H(1; 1)$$

- **Troisième hauteur** — issue de C , perpendiculaire à (AB) qui est l'axe des abscisses : c'est la verticale $x = 1$.
- **Vérification** : $H(1; 1)$ vérifie bien $x = 1$ ✓ — les trois hauteurs sont **concourantes**, comme le veut le théorème.
- **Contrôles d'orthogonalité** : $\overrightarrow{AH}(1; 1) \cdot \overrightarrow{BC}(-3; 3) = -3 + 3 = 0$ ✓
- $\overrightarrow{BH}(-3; 1) \cdot \overrightarrow{AC}(1; 3) = -3 + 3 = 0$ ✓
- $\overrightarrow{CH}(0; -2) \cdot \overrightarrow{AB}(4; 0) = 0$ ✓
- **Position** : H est **à l'intérieur** du triangle, ce qui confirme que le triangle est acutangle. On le vérifie : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 > 0$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 > 0$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 + 9 = 6 > 0$ ✓

Réponse. a) $y = x$ · b) $x + 3y - 4 = 0$ · c) $H(1; 1)$, sur la hauteur $x = 1$.