Plaquette 4 – Les trois expressions du produit scalaire et le calcul d'angles

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois expressions. Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' \qquad \text{(coordonnées, repère orthonormé)}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta \qquad \text{(normes et angle)}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \qquad \text{(par les normes seules)}$$

Projection orthogonale. Si H est le projeté de C sur (AB) :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \pm AB\times AH$$

avec le signe + si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens, − sinon.

Propriétés.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \qquad (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \qquad \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Identités remarquables vectorielles.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Norme et distance. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$.

Angle. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ — le signe du produit scalaire donne immédiatement si l'angle est **aigu** (>0), **droit** ($=0$) ou **obtus** (<0).

Correction de l'exercice 1 – Produit scalaire par coordonnées

— **Produit scalaire** : $3\times 1 + (-2)\times 4 = 3 - 8 = -5$.

— **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}6056$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \approx 4{,}1231$.

— **Cosinus** :

$$\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \frac{-5}{\sqrt{221}} \approx -0{,}33634$$

— **Angle** : $\theta \approx 109{,}65°$.

— **Signe** : le produit scalaire est **négatif**, donc l'angle est **obtus** ✓ — cohérent avec $109{,}65° > 90°$.

— **Contrôle** : $\sqrt{221} \approx 14{,}8661$, et $\sqrt{13}\times\sqrt{17} \approx 3{,}6056\times 4{,}1231 \approx 14{,}8661$ ✓

— **Contrôle par la troisième expression** : $\vec{u}-\vec{v} = (2\,;-6)$, de norme au carré $4+36 = 40$.

— $\frac{1}{2}(13+17-40) = \frac{-10}{2} = -5$ ✓ — même valeur.

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5$; $\theta \approx 109{,}7°$ (angle obtus).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Orthogonalité et paramètre

— **Condition** : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, soit
$$2(m-1)+3m=0$$
— **Résolution** : $2m-2+3m=0$, donc $5m=2$ et
$$m=0{,}4$$
— **Vérification** : $\vec{u}(2\,;0{,}4)$ et $\vec{v}(-0{,}6\,;3)$, donc $2\times(-0{,}6)+0{,}4\times 3=-1{,}2+1{,}2=0$ ✓
— **Normes** : $\|\vec{u}\|=\sqrt{4{,}16}\approx 2{,}0396$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{0{,}36+9}=\sqrt{9{,}36}\approx 3{,}0594$.
— **Contrôle géométrique** : le coefficient directeur de $\vec{u}$ vaut $\dfrac{0{,}4}{2}=0{,}2$, celui de $\vec{v}$ vaut $\dfrac{3}{-0{,}6}=-5$, et $0{,}2\times(-5)=-1$ ✓ — le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut bien -1.
— **Unicité** : l'équation est du **premier degré** en m, donc il y a exactement une solution.

Réponse. $m=0{,}4$.

Correction de l'exercice 3 – Produit scalaire par les normes

— **Produit scalaire** :
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=5\times 3\times\cos 60°=15\times\frac{1}{2}=7{,}5$$
— **Norme de la somme** :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=25+2\times 7{,}5+9=25+15+9=49$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$$
— **Contrôle par la différence** : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=25-15+9=19$, donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{19}\approx 4{,}3589$.
— **Contrôle de l'identité du parallélogramme** : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=49+19=68$, et $2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)=2(25+9)=68$ ✓
— **Encadrement attendu** : $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ doit être compris entre $|5-3|=2$ et $5+3=8$; on trouve 7 ✓
— **Interprétation** : l'angle de 60° est plutôt fermé, donc la somme est proche du maximum 8 ✓

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v}=7{,}5$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$.

Correction de l'exercice 4 – Angle d'un triangle

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;4)$.
— **Produit scalaire** : $3+4=7$.
— **Normes** : $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{10}\approx 3{,}1623$ et $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{17}\approx 4{,}1231$.
— **Cosinus** :
$$\cos B\hat{A}C=\frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{170}}\approx 0{,}53686$$
— **Angle** : $B\hat{A}C\approx 57{,}53°$.
— **Contrôle par Al-Kashi** : $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\|(-2\,;3)\|=\sqrt{13}$.
— $BC^2=13$ et $AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\cos B\hat{A}C=10+17-2\times 7=27-14=13$ ✓
— **Signe** : le produit scalaire est positif, donc l'angle est **aigu** ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Les autres angles** : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-3)(-2)+(-1)(3) = 6-3 = 3 > 0$, également aigu ; le triangle est **acutangle**.

Réponse. $B\hat{A}C \approx 57{,}5°$.

Correction de l'exercice 5 – Triangle rectangle

— **Test en** A : $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;-2)$, donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4-4 = 0$$

— **Conclusion** : le triangle est **rectangle en** A ✓

— **Contrôle par Pythagore** : $AB^2 = 20$, $AC^2 = 5$ et $BC^2 = \|(-3\,;-4)\|^2 = 9+16 = 25$.

— $AB^2 + AC^2 = 20+5 = 25 = BC^2$ ✓

— **Longueurs** : $AB = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$, $AC = \sqrt{5} \approx 2{,}2361$ et $BC = 5$ exactement.

— **Aire** : $\dfrac{AB\times AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$.

— **Contrôle des autres angles** : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)(-3)+(-2)(-4) = 12+8 = 20 \neq 0$ ✓ (pas droit en B).

— **Remarque** : $AB = 2AC$, donc le triangle est rectangle avec des cathètes dans le rapport 1 : 2 — l'angle en B vaut $\arctan\dfrac{1}{2} \approx 26{,}57°$ et celui en C environ $63{,}43°$.

Réponse. Rectangle en A ($\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$).

Correction de l'exercice 6 – Projection orthogonale

— **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 4\times\cos 45° = 24\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \approx 16{,}971$$

— **Par la projection** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH$ (même sens car l'angle est aigu), donc

$$AH = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8284$$

— **Contrôle direct** : dans le triangle rectangle AHC, $AH = AC\cos 45° = 4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ✓

— **Hauteur** : $CH = AC\sin 45° = 2\sqrt{2}$ également — le triangle AHC est **isocèle rectangle**, ce qui est attendu pour 45° ✓

— **Aire du triangle** : $\dfrac{AB\times CH}{2} = \dfrac{6\times 2\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}4853$.

— **Contrôle par l'autre formule d'aire** : $\dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 45° = 12\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ ✓

— **Position de** H : $AH \approx 2{,}83 < AB = 6$, donc H est bien **à l'intérieur** du segment $[AB]$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12\sqrt{2} \approx 16{,}97$ et $AH = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

Correction de l'exercice 7 – Ensemble de points

— **Traduction** : l'angle $A\hat{M}B$ est **droit**, donc M appartient au **cercle de diamètre** $[AB]$.

— **Centre** : le milieu I de $[AB]$, soit $I(1\,;0)$.

— **Rayon** : $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

— **Équation** :

$$(x-1)^2 + y^2 = 9$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Vérification par le calcul** : $\overrightarrow{MA}(-2-x\,;-y)$ et $\overrightarrow{MB}(4-x\,;-y)$, donc le produit scalaire vaut

$$(-2-x)(4-x)+y^2=-8+2x-4x+x^2+y^2=x^2-2x-8+y^2$$

— **Équation obtenue** : $x^2-2x+y^2=8$, soit $(x-1)^2+y^2=9$ ✓ — identique.

— **Contrôles** : $A(-2\,;0)$ vérifie $9=9$ ✓ et $B(4\,;0)$ aussi ✓ — les extrémités du diamètre appartiennent au cercle.

— **Point du sommet** : $(1\,;3)$ vérifie l'équation ; et $\overrightarrow{MA}(-3\,;-3)\cdot\overrightarrow{MB}(3\,;-3)=-9+9=0$ ✓

— **À retenir** : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ caractérise **toujours** le cercle de diamètre $[AB]$.

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: $(x-1)^2+y^2=9$.

Correction de l'exercice 8 – Longueur d'une médiane

— **Expression de la médiane** : I est le milieu de $[BC]$, donc

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

— **Carré de la norme** :

$$AI^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2\right)=\frac{1}{4}(25+20+49)=\frac{94}{4}=23{,}5$$

— **Longueur** : $AI=\sqrt{23{,}5}\approx 4{,}8477$.

— **Contrôle par le théorème de la médiane** : $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$.

— **Calcul de** BC : $BC^2=AB^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2=25-20+49=54$.

— **Vérification** : $2\times 23{,}5+\dfrac{54}{2}=47+27=74=25+49$ ✓

— **Cohérence géométrique** : $BC=\sqrt{54}\approx 7{,}348$, et la médiane 4,85 est bien inférieure à la demi-somme $\dfrac{5+7}{2}=6$ ✓

— **Angle en** A : $\cos B\hat{A}C=\dfrac{10}{35}\approx 0{,}2857$, soit environ 73,4°.

Réponse. $AI=\sqrt{23{,}5}\approx 4{,}85$.

Correction de l'exercice 9 – Développer une expression vectorielle

— **Développement par bilinéarité** :

$$3\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+6\vec{v}\cdot\vec{u}-2\vec{v}\cdot\vec{v}$$

— **Regroupement** (en utilisant $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$) :

$$=3\|\vec{u}\|^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}-2\|\vec{v}\|^2$$

— **Application numérique** avec $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$:

$$3\times 4+5\times 1-2\times 9=12+5-18=-1$$

— **Contrôle par coordonnées** : prenons $\vec{u}(2\,;0)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right)$ — alors $\|\vec{v}\|^2=\dfrac{1+35}{4}=9$ ✓ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ ✓

— $\vec{u}+2\vec{v}=\left(3\,;\sqrt{35}\right)$ et $3\vec{u}-\vec{v}=\left(\dfrac{11}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right)$.

— **Produit** : $3\times\dfrac{11}{2}-\dfrac{35}{2}=\dfrac{33-35}{2}=-1$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Réflexe** : le produit scalaire se développe **exactement comme un produit de nombres**, à condition de se souvenir que $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Réponse. $3\|\vec{u}\|^2 + 5\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$.

Correction de l'exercice 10 – Vecteur orthogonal

— **Vecteur orthogonal** : on échange les coordonnées et on change un signe : $\vec{n}(3\,;4)$.
— **Contrôle** : $4\times 3 + (-3)\times 4 = 12 - 12 = 0$ ✓
— **Norme** : $\|\vec{n}\| = \sqrt{9+16} = 5$.
— **Vecteur unitaire** :

$$\vec{w} = \frac{1}{5}\vec{n} = \left(\frac{3}{5}\,;\frac{4}{5}\right) = (0{,}6\,;0{,}8)$$

— **Contrôles** : $\|\vec{w}\| = \sqrt{0{,}36+0{,}64} = 1$ ✓ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 2{,}4 - 2{,}4 = 0$ ✓
— **Second vecteur unitaire** : l'opposé $(-0{,}6\,;-0{,}8)$ convient également — il y a exactement **deux** solutions.
— **Règle générale** : à $\vec{u}(a\,;b)$ on associe $(-b\,;a)$ ou $(b\,;-a)$, puis on divise par $\sqrt{a^2+b^2}$.
— **Au passage** : $\|\vec{u}\| = 5$ aussi — le triplet 3-4-5 est à l'œuvre.

Réponse. $\vec{w}(0{,}6\,;0{,}8)$ (ou son opposé).

Correction de l'exercice 11 – Al-Kashi

— **Al-Kashi** : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\cos B\hat{A}C$, soit

$$49 = 64 + 25 - 80\cos B\hat{A}C = 89 - 80\cos B\hat{A}C$$

— **Résolution** : $80\cos B\hat{A}C = 40$, donc

$$\cos B\hat{A}C = \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad B\hat{A}C = 60°$$

— **Aire** :

$$A = \frac{1}{2}\times 8\times 5\times \sin 60° = 20\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}321$$

— **Contrôle par la formule de Héron** : $p = \dfrac{8+5+7}{2} = 10$, et

$$A = \sqrt{10\times 2\times 5\times 3} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

— Les deux méthodes donnent bien la même aire, $10\sqrt{3}$.
— **Produit scalaire** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 40\times\frac{1}{2} = 20$.
— **Contrôle par la troisième expression** : $\frac{1}{2}(64+25-49) = \frac{40}{2} = 20$ ✓
— **Cohérence** : l'angle de 60° n'est **pas** le plus grand du triangle, puisque le plus grand côté est $AB = 8$, opposé à $A\hat{C}B$.

Réponse. $\cos B\hat{A}C = \frac{1}{2}$ (60°) et $A = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32$.

Correction de l'exercice 12 – Hauteur d'un triangle

— **Observation** : (AB) est l'axe des abscisses, donc le projeté de C est immédiat.
— **Pied de la hauteur** : $H(2\,;0)$.
— **Longueur** : $CH = 4$.
— **Vérification par le produit scalaire** : $\overrightarrow{CH}(0\,;-4)$ et $\overrightarrow{AB}(6\,;0)$, donc $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle par la projection** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 2 + 0\times 4 = 12$, et $AB\times AH = 6\times 2 = 12$ ✓
— **Aire** : $\dfrac{AB\times CH}{2} = \dfrac{6\times 4}{2} = 12$.
— **Contrôle de l'aire par le déterminant** : $\dfrac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A + \ldots|$ — plus simplement, $\dfrac{1}{2}|6\times 4 - 0\times 2| = 12$ ✓
— **Angles** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12 > 0$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-6)(-4) + 0 = 24 > 0$ — les deux angles à la base sont aigus, donc H est bien **entre** A et B ✓

Réponse. $H(2\,;0)$ et $CH = 4$.

Correction de l'exercice 13 – Équation d'une droite par vecteur normal

— **Caractérisation** : $M(x\,;y)$ appartient à la droite si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$.
— **Traduction** :

$$3(x-2) + 5(y+1) = 0$$

— **Développement** : $3x - 6 + 5y + 5 = 0$, soit

$$3x + 5y - 1 = 0$$

— **Vérification** : A donne $6 - 5 - 1 = 0$ ✓
— **Autre point** : $(2-5\,;-1+3) = (-3\,;2)$, obtenu en suivant un vecteur directeur $(-5\,;3)$: $-9 + 10 - 1 = 0$ ✓
— **Contrôle du vecteur directeur** : $(-5\,;3)\cdot(3\,;5) = -15 + 15 = 0$ ✓ — il est bien orthogonal au normal.
— **Règle générale** : dans l'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $(a\,;b)$ est **normal** et $(-b\,;a)$ est **directeur**.
— **Coefficient directeur** : $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{3}{5} = -0{,}6$, cohérent avec le vecteur directeur $\dfrac{3}{-5}$ ✓

Réponse. $3x + 5y - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 14 – Distance d'un point à une droite

— **Formule** :

$$d(P,d) = \frac{|3\times 4 - 4\times 3 + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12 - 12 + 2|}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

— **Vérification par le projeté** : $\vec{n}(3\,;-4)$, de norme 5. On cherche t tel que $P + t\vec{n} \in d$:
— $3(4+3t) - 4(3-4t) + 2 = 12 + 9t - 12 + 16t + 2 = 2 + 25t = 0$, donc $t = -\dfrac{2}{25} = -0{,}08$.
— **Projeté** : $H(4 - 0{,}24\,;3 + 0{,}32) = H(3{,}76\,;3{,}32)$.
— **Contrôle** : $3\times 3{,}76 - 4\times 3{,}32 + 2 = 11{,}28 - 13{,}28 + 2 = 0$ ✓
— **Distance** : $\left|\overrightarrow{PH}\right| = |t|\times\|\vec{n}\| = 0{,}08\times 5 = 0{,}4$ ✓
— **Interprétation** : P est très **proche** de la droite — le numérateur $|2|$ est petit devant la norme 5.
— **Côté de la droite** : $3x_P - 4y_P + 2 = 2 > 0$; le point $(0\,;0)$ donne $2 > 0$ également, donc P et l'origine sont du **même côté** ✓

Réponse. $d(P,d) = 0{,}4$, avec $H(3{,}76\,;3{,}32)$.

Correction de l'exercice 15 – Losange et diagonales

— **Développement** :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, l'expression est **nulle**, donc $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont **orthogonaux** ✓
— **Interprétation** : dans un parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les diagonales sont $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$.
— **Propriété retrouvée** : les diagonales d'un **losange** (parallélogramme à côtés égaux) sont **perpendiculaires** ✓
— **Vérification numérique** : avec $\vec{u}(3\,;4)$ et $\vec{v}(5\,;0)$, tous deux de norme 5 :
— $\vec{u}+\vec{v} = (8\,;4)$ et $\vec{u}-\vec{v} = (-2\,;4)$.
— **Produit** : $-16+16=0$ ✓
— **Réciproque** : si les diagonales sont perpendiculaires, alors $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, donc les côtés sont égaux — c'est bien un losange. L'équivalence est **complète**.

Réponse. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$: diagonales d'un losange perpendiculaires.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : orthocentre

a) **Hauteur issue de** A : elle est perpendiculaire à (BC), donc admet $\overrightarrow{BC}(-3\,;3)$ comme vecteur normal — ou plus simplement $(-1\,;1)$.

— **Équation** : $-1(x-0)+1(y-0)=0$, soit

$$y = x$$

b) **Hauteur issue de** B : perpendiculaire à (AC), de vecteur normal $\overrightarrow{AC}(1\,;3)$.

— **Équation** : $1(x-4)+3(y-0)=0$, soit

$$x+3y-4=0$$

c) **Intersection.** En substituant $y=x$: $x+3x-4=0$, donc $4x=4$ et $x=1$.

$$H(1\,;1)$$

— **Troisième hauteur** — issue de C, perpendiculaire à (AB) qui est l'axe des abscisses : c'est la verticale $x=1$.
— **Vérification** : $H(1\,;1)$ vérifie bien $x=1$ ✓ — les trois hauteurs sont **concourantes**, comme le veut le théorème.
— **Contrôles d'orthogonalité** : $\overrightarrow{AH}(1\,;1)\cdot\overrightarrow{BC}(-3\,;3) = -3+3=0$ ✓
— $\overrightarrow{BH}(-3\,;1)\cdot\overrightarrow{AC}(1\,;3) = -3+3=0$ ✓
— $\overrightarrow{CH}(0\,;-2)\cdot\overrightarrow{AB}(4\,;0)=0$ ✓
— **Position** : H est **à l'intérieur** du triangle, ce qui confirme que le triangle est acutangle. On le vérifie : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4>0$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12>0$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-3+9=6>0$ ✓

Réponse. a) $y=x$ · b) $x+3y-4=0$ · c) $H(1\,;1)$, sur la hauteur $x=1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).