

Plaquette 1 – Calcul du produit scalaire

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Exercices

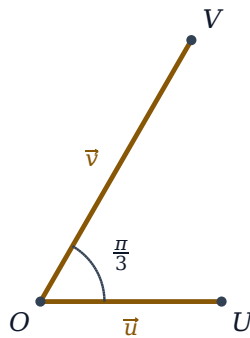
Méthode

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**, pas un vecteur. Quatre expressions permettent de le calculer : par les normes et l'angle, par les **coordonnées**, par le **projeté orthogonal**, ou par les normes seules. On apprend à choisir la plus rapide selon les données de l'énoncé.

Exercice 1 – Avec les normes et l'angle

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et forment un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



Deux vecteurs de normes 3 et 5

Exercice 2 – Un angle obtus

Mêmes normes que précédemment, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$, mais l'angle vaut maintenant $\frac{2\pi}{3}$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et commenter le signe obtenu.

Exercice 3 – Les cas extrêmes

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour normes 4 et 7. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Exercice 4 – Par les coordonnées

Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

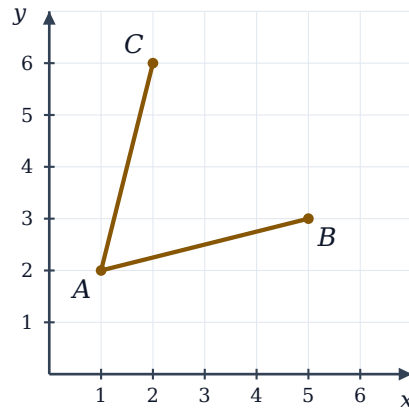
- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 5 – Trois points dans un repère

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2)$, $B(5; 3)$ et $C(2; 6)$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis en déduire la nature de l'angle $\widehat{BAC}$.

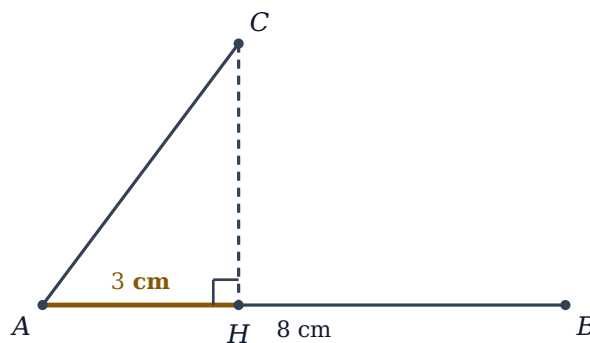


Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Exercice 6 – Avec le projeté orthogonal

Sur la figure, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , avec $AB = 8$ cm et $AH = 3$ cm.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

Exercice 7 – Le carré scalaire

a) Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{u}$ lorsque $\|\vec{u}\| = 6$?

b) Dans un repère orthonormé, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{v}$ de deux façons.

Exercice 8 – La formule de polarisation

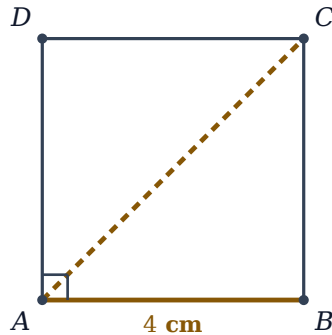
On donne $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 9 – Dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.



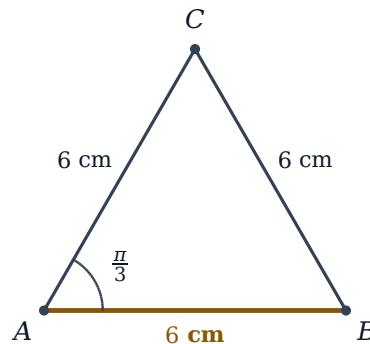
Carré de côté 4 cm et sa diagonale

Exercice 10 – Dans un triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.



Triangle équilatéral de côté 6 cm

Exercice 11 – Développer une expression vectorielle

On donne $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 4$.

Calculer $(2\vec{u}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v})$.

Exercice 12 – Calculer un angle

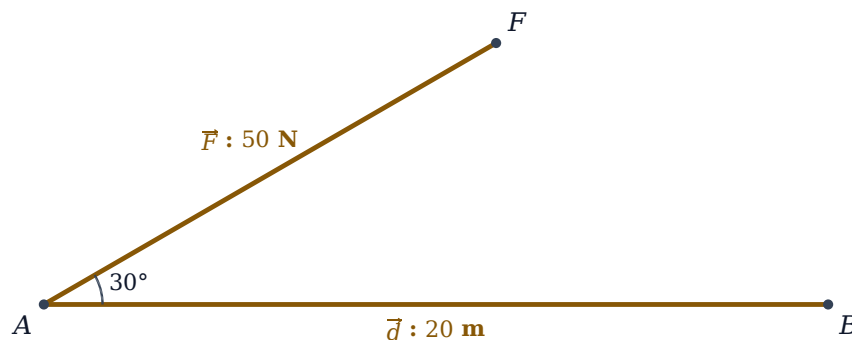
Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une valeur approchée au degré près de l'angle formé par ces deux vecteurs.

Exercice 13 – Le travail d’une force

Une caisse est tirée sur 20 m par une force de 50 N dont la direction fait un angle de 30° avec le déplacement.

En physique, le travail de la force est $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Calculer ce travail, en joules.

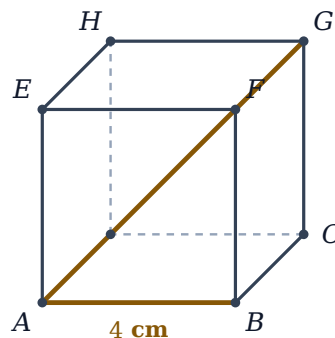


Force inclinée de 30° sur le déplacement

Exercice 14 – Dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm. On se place dans le repère orthonormé d'origine A porté par les arêtes.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$, où G est le sommet opposé à A.



Cube d'arête 4 cm et sa grande diagonale

Exercice 15 – Synthèse : le parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer la longueur de la diagonale AC.