

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cercles, lieux de points et optimisation

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Exercices

Méthode

On caractérise des **cercles** et des **droites** par des relations de produit scalaire, on détermine des **lieux de points**, et on utilise le produit scalaire pour des problèmes d'**optimisation** géométrique.

Exercice 1 – Reconnaître un cercle

Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Exercice 2 – Cercle de diamètre donné

Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1 ; 2)$ et $B(5 ; -4)$.

Exercice 3 – Lieu de points : médiatrice

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA = MB$, avec $A(-1 ; 3)$ et $B(5 ; 1)$.

Exercice 4 – Lieu de points : somme de carrés

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 40$, avec $A(0 ; 0)$ et $B(4 ; 0)$.

Exercice 5 – Tangente à un cercle

Déterminer l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $T(3 ; 4)$.

Exercice 6 – Droite et cercle : position relative

Déterminer la position relative du cercle de centre $\Omega(1 ; 2)$ et de rayon 3 et de la droite $d: 4x - 3y + 5 = 0$.

Exercice 7 – Intersection de deux cercles

Déterminer l'axe radical (droite portant les points communs) des cercles $x^2 + y^2 = 16$ et $(x - 6)^2 + y^2 = 4$, puis leurs points d'intersection.

Exercice 8 – Angle inscrit

Soit $[AB]$ un diamètre d'un cercle de rayon 5, et M un point du cercle avec $AM = 6$. Calculer BM et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Exercice 9 – Optimisation d'un produit scalaire

Soient $A(0 ; 0)$ et $B(4 ; 0)$. Déterminer la valeur minimale de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand M parcourt le plan, et le point où elle est atteinte.

Exercice 10 – Cauchy-Schwarz

Montrer que pour tous réels a et b : $|a + 2b| \leq \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 11 – Hauteur et aire par le produit scalaire

Soient $A(1 ; 1)$, $B(5 ; 3)$ et $C(2 ; 6)$. Calculer l'aire du triangle ABC en passant par la distance de C à (AB) .

Exercice 12 – Lieu avec un rapport

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$, avec $A(0 ; 0)$ et $B(6 ; 0)$.

Exercice 13 – Distance minimale à un cercle

Le point $P(8 ; 6)$ et le cercle de centre $O(0 ; 0)$ et de rayon 4 étant donnés, déterminer les distances minimale et maximale de P à un point du cercle.

Exercice 14 – Trapèze et orthogonalité

Soient $A(0 ; 0)$, $B(4 ; 0)$, $C(3 ; 2)$ et $D(1 ; 2)$. Montrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle et calculer l'angle entre ses diagonales.

Exercice 15 – Cercle circonscrit

Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle $A(0 ; 0)$, $B(6 ; 0)$, $C(0 ; 8)$.

Exercice 16 – Synthèse : problème complet

Soient $A(-3 ; 0)$, $B(3 ; 0)$ et le cercle C de diamètre $[AB]$.

- Donner l'équation de C .
- Le point $M(x ; y)$ décrit C avec $y > 0$. Exprimer $MA^2 + MB^2$ et $MA \times MB$ en fonction de y .
- Déterminer la position de M maximisant l'aire du triangle AMB .