Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cercles, lieux de points et optimisation

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Exercices

Méthode

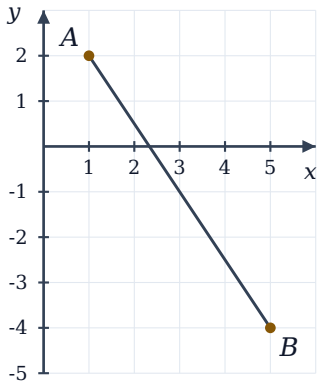
On caractérise des **cercles** et des **droites** par des relations de produit scalaire, on détermine des **lieux de points**, et on utilise le produit scalaire pour des problèmes d'**optimisation** géométrique.

Exercice 1 – Reconnaître un cercle

Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Exercice 2 – Cercle de diamètre donné

Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1\,;2)$ et $B(5\,;-4)$.



Le diamètre [AB]

Exercice 3 – Lieu de points : médiatrice

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA = MB$, avec $A(-1\,;3)$ et $B(5\,;1)$.

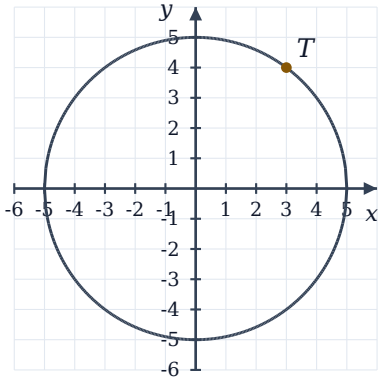
Exercice 4 – Lieu de points : somme de carrés

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 40$, avec $A(0\,;0)$ et $B(4\,;0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Tangente à un cercle

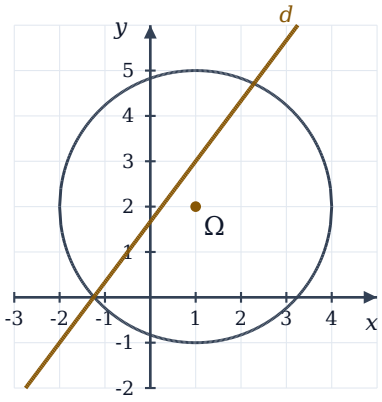
Déterminer l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $T(3\,;4)$.



Le cercle de centre O et de rayon 5

Exercice 6 – Droite et cercle : position relative

Déterminer la position relative du cercle de centre $\Omega(1\,;2)$ et de rayon 3 et de la droite d:$4x - 3y + 5 = 0$.

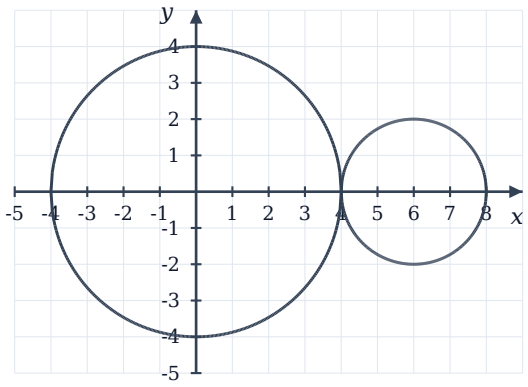


Le cercle de rayon 3 et la droite d

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Intersection de deux cercles

Déterminer l'axe radical (droite portant les points communs) des cercles $x^2 + y^2 = 16$ et $(x-6)^2 + y^2 = 4$, puis leurs points d'intersection.



Les deux cercles

Exercice 8 – Angle inscrit

Soit $[AB]$ un diamètre d'un cercle de rayon 5, et M un point du cercle avec $AM = 6$. Calculer BM et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Exercice 9 – Optimisation d'un produit scalaire

Soient $A(0\,;0)$ et $B(4\,;0)$. Déterminer la valeur minimale de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand M parcourt le plan, et le point où elle est atteinte.

Exercice 10 – Cauchy-Schwarz

Montrer que pour tous réels a et b : $|a + 2b| \leq \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 11 – Hauteur et aire par le produit scalaire

Soient $A(1\,;1)$, $B(5\,;3)$ et $C(2\,;6)$. Calculer l'aire du triangle ABC en passant par la distance de C à (AB).

Exercice 12 – Lieu avec un rapport

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$, avec $A(0\,;0)$ et $B(6\,;0)$.

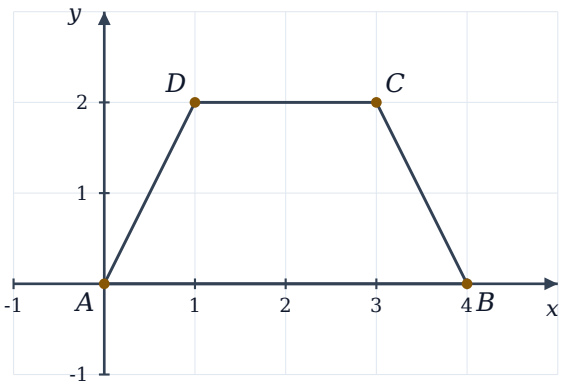
Exercice 13 – Distance minimale à un cercle

Le point $P(8\,;6)$ et le cercle de centre $O(0\,;0)$ et de rayon 4 étant donnés, déterminer les distances minimale et maximale de P à un point du cercle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Trapèze et orthogonalité

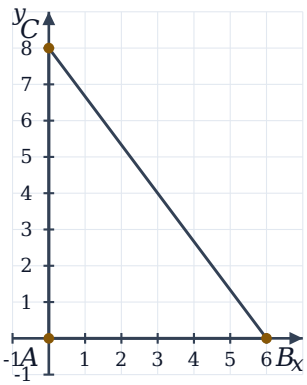
Soient $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$, $C(3\,;2)$ et $D(1\,;2)$. Montrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle et calculer l'angle entre ses diagonales.



Le quadrilatère ABCD

Exercice 15 – Cercle circonscrit

Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(0\,;8)$.



Le triangle ABC

Exercice 16 – Synthèse : problème complet

Soient $A(-3\,;0)$, $B(3\,;0)$ et le cercle C de diamètre $[AB]$.

a) Donner l'équation de C.

b) Le point $M(x\,;y)$ décrit C avec $y > 0$. Exprimer $MA^2 + MB^2$ et $MA \times MB$ en fonction de y.

c) Déterminer la position de M maximisant l'aire du triangle AMB.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).