Plaquette 4 – Les trois expressions du produit scalaire et le calcul d'angles

Produit scalaire dans le plan — Première spé maths

Exercices

Méthode

On choisit **la bonne expression** du produit scalaire selon les données : coordonnées, normes et angle, ou projection — puis on en déduit **angles**, **longueurs** et **orthogonalité**.

Exercice 1 – Produit scalaire par coordonnées

Soient $\vec{u}(3\,;-2)$ et $\vec{v}(1\,;4)$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, les normes, puis l'angle entre les deux vecteurs.

Exercice 2 – Orthogonalité et paramètre

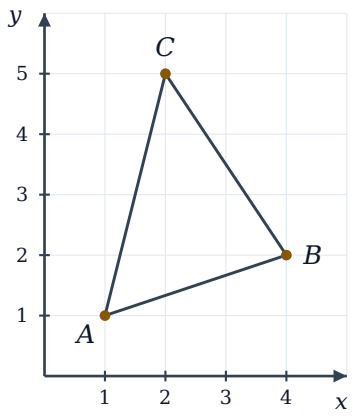
Pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{u}(2\,;m)$ et $\vec{v}(m-1\,;3)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 3 – Produit scalaire par les normes

Deux vecteurs vérifient $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et forment un angle de 60°. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

Exercice 4 – Angle d'un triangle

Soient $A(1\,;1)$, $B(4\,;2)$ et $C(2\,;5)$. Calculer $B\hat{A}C$.

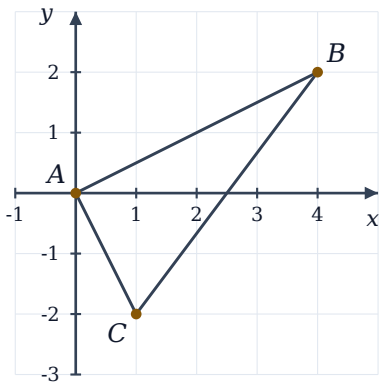


Le triangle ABC

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Triangle rectangle

Montrer que le triangle de sommets $A(0\,;0)$, $B(4\,;2)$ et $C(1\,;-2)$ est rectangle, et préciser en quel sommet.



Le triangle ABC

Exercice 6 – Projection orthogonale

Dans un triangle, $AB = 6$, $AC = 4$ et $B\hat{A}C = 45°$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis la distance AH où H est le projeté de C sur (AB).

Exercice 7 – Ensemble de points

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, avec $A(-2\,;0)$ et $B(4\,;0)$.

Exercice 8 – Longueur d'une médiane

Dans un triangle ABC avec $AB = 5$, $AC = 7$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$, calculer la longueur de la médiane AI issue de A.

Exercice 9 – Développer une expression vectorielle

Développer et simplifier $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - \vec{v})$ en fonction de $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

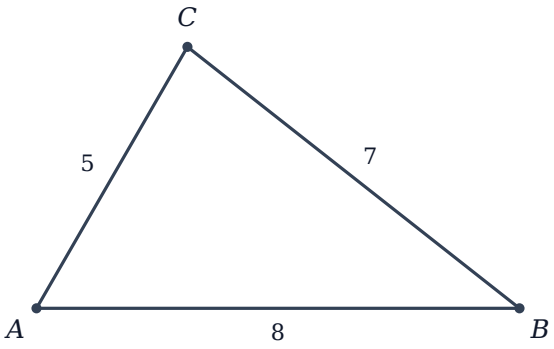
Exercice 10 – Vecteur orthogonal

Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}(4\,;-3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Al-Kashi

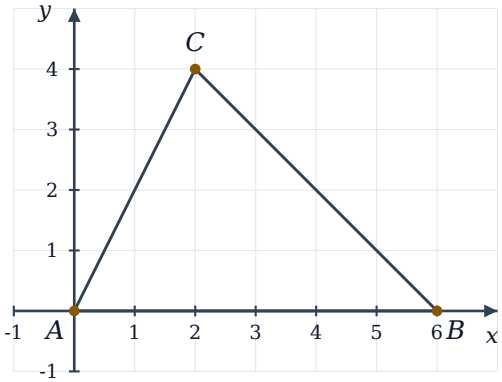
Dans un triangle, $AB = 8$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Calculer $\cos B\hat{A}C$ puis l'aire.



Le triangle ABC (longueurs en unités)

Exercice 12 – Hauteur d'un triangle

Soient $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$ et $C(2\,;4)$. Déterminer le pied H de la hauteur issue de C, puis la longueur CH.



Le triangle ABC

Exercice 13 – Équation d'une droite par vecteur normal

Déterminer l'équation de la droite passant par $A(2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;5)$.

Exercice 14 – Distance d'un point à une droite

Calculer la distance du point $P(4\,;3)$ à la droite $d : 3x - 4y + 2 = 0$.

Exercice 15 – Losange et diagonales

Montrer que si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, alors $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$. Quelle propriété du losange retrouve-t-on ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

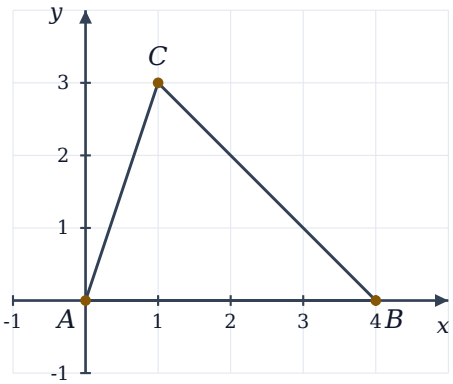
Exercice 16 – Synthèse : orthocentre

Soient $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(1\,;3)$.

a) Déterminer l'équation de la hauteur issue de A.

b) Déterminer celle issue de B.

c) En déduire les coordonnées de l'orthocentre et vérifier avec la troisième hauteur.



Le triangle ABC

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).