

Plaquette 3 - Équations et inéquations

Second degré — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choisir la bonne méthode.

Forme de l'équation	Méthode
$ax^2 + c = 0$	isoler x^2 , puis $x = \pm\sqrt{\quad}$ si le second membre est positif
$ax^2 + bx = 0$	factoriser par x : $x(ax + b) = 0$
$A(x) \times B(x) = 0$	règle du produit nul : $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$
$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$	$A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ complète	discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
$ax^4 + bx^2 + c = 0$	poser $X = x^2$, résoudre en X , puis revenir à x

Discriminant et racines.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\Delta > 0)$$

Règle du produit nul. Un produit de facteurs est nul si et seulement si **l'un au moins** de ses facteurs est nul.

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Mettre un problème en équation. On nomme l'inconnue avec son unité, on écrit les contraintes ($x > 0$, $x < 10\dots$), on traduit l'énoncé, on résout, puis on **écarte les solutions qui ne respectent pas les contraintes**.

Correction de l'exercice 1 - Des équations sans discriminant

a) On isole le carré : $3x^2 = 12$, donc $x^2 = 4$ et

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

b) On factorise par x : $x(x + 5) = 0$. D'après la **règle du produit nul**, $x = 0$ ou $x + 5 = 0$, donc $S = \{-5; 0\}$.

c) $2x^2 = -8$ donne $x^2 = -4$: un carré n'est jamais négatif, il n'y a **aucune solution**.

d) Un carré vaut 9 lorsque la quantité vaut 3 ou -3 : $x - 4 = 3$ ou $x - 4 = -3$, d'où $S = \{1; 7\}$.

Erreur à éviter en b) : simplifier par x ferait perdre la solution $x = 0$.

Réponse. a) $\{-2; 2\}$ — b) $\{-5; 0\}$ — c) $\emptyset$ — d) $\{1; 7\}$.

Correction de l'exercice 2 - L'équation complète de base

Ici aucun facteur commun et aucun terme manquant : on passe par le discriminant.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

— $\Delta > 0$: deux racines, avec $\sqrt{\Delta} = 3$.

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

- **Vérification de $x = 2$** : $4 - 14 + 10 = 0$ ✓
- **Vérification de $x = 5$** : $25 - 35 + 10 = 0$ ✓
- **Contrôle somme-produit** : $2 + 5 = 7 = -\frac{b}{a}$ ✓ et $2 \times 5 = 10 = \frac{c}{a}$ ✓

On pouvait aussi remarquer directement que $10 = 2 \times 5$ et $7 = 2 + 5$: la factorisation $(x - 2)(x - 5)$ saute alors aux yeux.

Réponse. $S = \{2; 5\}$.

Correction de l'exercice 3 - Se débarrasser des décimaux

Premier réflexe : multiplier les deux membres par 2 pour n'avoir que des entiers. Multiplier une équation par un nombre non nul ne change pas ses solutions.

$$0,5x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

- **Discriminant** : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 16 + 48 = 64$, donc $\sqrt{\Delta} = 8$.
- **Racines** :

$$x_1 = \frac{4-8}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{4+8}{2} = 6$$

- **Vérification dans l'équation de départ** : $0,5 \times 4 + 4 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$ ✓ et $0,5 \times 36 - 12 - 6 = 18 - 18 = 0$ ✓

Remarque. Appliquer le discriminant directement à $a = 0,5$ donnerait $\Delta = 4 + 12 = 16$ et les mêmes racines : c'est correct, mais les calculs sont plus pénibles.

Réponse. $S = \{-2; 6\}$.

Correction de l'exercice 4 - Deux carrés de chaque côté

Méthode 1 — différence de carrés. On ramène tout à gauche :

$$(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$$

- On applique $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ avec $A = 2x - 1$ et $B = x + 3$:

$$[(2x - 1) - (x + 3)][(2x - 1) + (x + 3)] = (x - 4)(3x + 2) = 0$$
- Règle du produit nul : $x = 4$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

Méthode 2 — tout développer. $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ et $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, d'où $3x^2 - 10x - 8 = 0$.

- $\Delta = 100 + 96 = 196$ et $\sqrt{196} = 14$, donc $x = \frac{10 \pm 14}{6}$, soit 4 et $-\frac{2}{3}$ ✓

Les deux méthodes donnent le même ensemble ; la première évite tout calcul de discriminant.

Réponse. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$.

Correction de l'exercice 5 - Une équation produit

D'après la **règle du produit nul**, l'équation équivaut à :

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

- **Premier facteur** : $x = 3$.

— **Second facteur** : $\Delta = 25 - 24 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$, donc $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, soit 2 et 3.

— L'ensemble des solutions réunit les deux listes, **sans répéter** 3 :

$$S = \{2; 3\}$$

Remarque intéressante. Comme $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, l'expression de départ vaut $(x - 3)^2(x - 2)$: la valeur 3 est une racine **double** du produit. Elle ne compte qu'une fois dans l'ensemble des solutions, mais la courbe correspondante touche l'axe des abscisses en 3 sans le traverser.

Réponse. $S = \{2; 3\}$.

Correction de l'exercice 6 - Le piège de la valeur interdite

Domaine. Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x - 2 \neq 0$, donc $x \neq 2$. La valeur 2 est **interdite**.

Un quotient est nul quand son numérateur est nul (et que le quotient existe) :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0$$

— $x^2 - 4 = 0$ donne $x^2 = 4$, soit $x = -2$ ou $x = 2$.

— La valeur 2 est interdite : on l'écarte.

$$S = \{-2\}$$

Piège. En simplifiant $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, on obtient $x = -2$ — mais cette simplification n'est licite que pour $x \neq 2$: il faut avoir posé le domaine **avant**.

Réponse. $S = \{-2\}$ (la valeur 2 est interdite).

Correction de l'exercice 7 - Une inconnue au dénominateur

Domaine. $x \neq 0$.

On multiplie les deux membres par x (non nul), ce qui ramène au second degré :

$$x^2 + 6 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 25 - 24 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$.

— Les deux valeurs sont non nulles : elles sont acceptables.

— **Vérification** : $2 + \frac{6}{2} = 2 + 3 = 5 \checkmark$ et $3 + \frac{6}{3} = 3 + 2 = 5 \checkmark$

$$S = \{2; 3\}$$

Lecture. On cherchait un nombre dont la somme avec son « complément à 6 par division » vaut 5 : 2 et 3 sont justement de somme 5 et de produit 6.

Réponse. $S = \{2; 3\}$.

Correction de l'exercice 8 - Une équation de degré 4

Changement d'inconnue. On pose $X = x^2$, avec la contrainte $X \geq 0$. Comme $x^4 = (x^2)^2 = X^2$, l'équation devient :

$$X^2 - 13X + 36 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 169 - 144 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$.

- **Racines en X** : $X_1 = \frac{13-5}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$. Toutes deux sont positives, donc exploitables.
- **Retour à x** : $x^2 = 4$ donne $x = \pm 2$; $x^2 = 9$ donne $x = \pm 3$.
 $S = \{-3; -2; 2; 3\}$
- **Vérification pour $x = 3$** : $81 - 117 + 36 = 0 \checkmark$

Attention. Une racine **négative** en X serait à rejeter : x^2 ne peut pas être négatif. Et chaque valeur positive de X donne **deux** valeurs de x .

Réponse. $S = \{-3; -2; 2; 3\}$.

Correction de l'exercice 9 - Somme et produit imposés

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines du trinôme :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

- Ici $S = 11$ et $P = 24$, donc on résout $x^2 - 11x + 24 = 0$.
- **Discriminant** : $\Delta = 121 - 96 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{11-5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{11+5}{2} = 8$.
- **Vérification** : $3 + 8 = 11 \checkmark$ et $3 \times 8 = 24 \checkmark$

Les deux nombres cherchés sont 3 et 8.

Quand il n'y a pas de solution. Si le discriminant $S^2 - 4P$ est négatif, aucun couple de réels ne convient : par exemple une somme de 4 et un produit de 9 sont impossibles, car $16 - 36 < 0$.

Réponse. Les deux nombres sont 3 et 8.

Correction de l'exercice 10 - Choisir le paramètre pour une racine double

Une équation du second degré admet une racine double **si et seulement si** son discriminant est nul :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m$$

- On résout $4 - 4m = 0$, d'où $m = 1$.
- **La racine double** vaut alors :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

- **Vérification** : pour $m = 1$, l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$, soit $(x - 1)^2 = 0$, dont l'unique solution est 1 $\checkmark$

Pour aller plus loin. Le signe de $4 - 4m$ classe tous les cas : deux racines si $m < 1$, une racine double si $m = 1$, aucune racine si $m > 1$.

Réponse. $m = 1$, et la racine double vaut 1.

Correction de l'exercice 11 - Intersection d'une droite et d'une parabole

a) Un point d'intersection a la même ordonnée sur les deux courbes :

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

- **Discriminant** : $\Delta = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$.

- **Ordonnées** : on remplace dans l'équation la plus simple, $y = x^2$: pour $x = -1$, $y = 1$; pour $x = 3$, $y = 9$.
- Les points d'intersection sont $A(-1 ; 1)$ et $B(3 ; 9)$.
- **Contrôle avec la droite** : $2 \times (-1) + 3 = 1 \checkmark$ et $2 \times 3 + 3 = 9 \checkmark$
- b) Sur le graphique, la droite coupe bien la parabole une fois à gauche de l'axe des ordonnées et une fois vers $x = 3$: les lectures concordent.

Réponse. $A(-1 ; 1)$ et $B(3 ; 9)$.

Correction de l'exercice 12 - Une inéquation produit

On étudie le signe de chaque facteur, puis celui du produit.

- **Facteur affine** : $2x + 1$ s'annule en $-\frac{1}{2}$, négatif avant, positif après.
- **Trinôme** : $\Delta = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$, racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Comme $a = 1 > 0$, il est négatif entre 1 et 3.

Intervalle	$[-\infty ; -\frac{1}{2}]$	$[-\frac{1}{2} ; 1]$	$]1 ; 3[$	$]3 ; +\infty[$
Signe de $2x + 1$	−	+	+	+
Signe du trinôme	+	+	−	+
Signe du produit	−	+	−	+

L'inégalité étant large, on **ferme** en $-\frac{1}{2}$, 1 et 3, où le produit s'annule.

$$S = \left[-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup [1 ; 3]$$

- **Contrôle** : pour $x = 0$, le produit vaut $1 \times 3 = 3 > 0$, donc 0 n'est pas solution $\checkmark$

Réponse. $S = \left[-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup [1 ; 3]$.

Correction de l'exercice 13 - Un trinôme au dénominateur

Domaine. Le dénominateur $x^2 - 3x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc pour racines 1 et 2 : ces deux valeurs sont **interdites**.

- **Numérateur** : $x + 2$ s'annule en -2 , négatif avant, positif après.
- **Dénominateur** : $a = 1 > 0$, donc il est négatif entre 1 et 2, positif à l'extérieur.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 1[$	$] 1 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $x + 2$	−	+	+	+
Signe de $x^2 - 3x + 2$	+	+	−	+
Signe du quotient	−	+	−	+

Le quotient est négatif ou nul sur $] -\infty ; -2[$ (on ferme en -2 , où il vaut 0) et sur $] 1 ; 2[$ (bornes **ouvertes** : valeurs interdites).

$$S =] -\infty ; -2] \cup] 1 ; 2[$$

Réponse. $S =] -\infty ; -2] \cup] 1 ; 2[$.

Correction de l'exercice 14 - Deux entiers consécutifs

Mise en équation. On note x le plus petit des deux entiers ; le suivant est $x + 1$.
L'énoncé se traduit par :

$$x(x + 1) = 156 \Leftrightarrow x^2 + x - 156 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-156) = 1 + 624 = 625$, et $\sqrt{625} = 25$.

— **Racines** :

$$x_1 = \frac{-1 - 25}{2} = -13 \quad x_2 = \frac{-1 + 25}{2} = 12$$

— Les deux valeurs sont des entiers : elles conviennent toutes les deux.

— **Vérification** : $12 \times 13 = 156 \checkmark$ et $(-13) \times (-12) = 156 \checkmark$

Il y a donc deux couples : (12 ; 13) et (-13 ; -12).

Remarque. Si l'énoncé imposait des entiers **naturels**, seule la solution (12 ; 13) serait retenue.

Réponse. (12 ; 13) et (-13 ; -12).

Correction de l'exercice 15 - Les dimensions du rectangle

Mise en équation. On note x la largeur en centimètres, avec la contrainte $x > 0$. La longueur vaut $x + 3$, et l'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions :

$$x(x + 3) = 40 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 9 + 160 = 169$, et $\sqrt{169} = 13$.

— **Racines** :

$$x_1 = \frac{-3 - 13}{2} = -8 \quad x_2 = \frac{-3 + 13}{2} = 5$$

— **Retour au contexte** : une largeur ne peut pas être négative, donc $x_1 = -8$ est à rejeter. On retient $x = 5$.

— La largeur vaut 5 cm et la longueur $5 + 3 = 8$ cm.

— **Vérification** : $5 \times 8 = 40 \checkmark$

À ne pas oublier. Une équation issue d'un problème donne souvent une solution mathématiquement correcte mais absurde dans le contexte : il faut toujours conclure par une phrase.

Réponse. Largeur 5 cm, longueur 8 cm.

Correction de l'exercice 16 - La margelle de la piscine

Mise en équation. L'ensemble « piscine + margelle » est un rectangle de dimensions $10 + 2x$ et $6 + 2x$ (la largeur x s'ajoute **de chaque côté**), avec $x > 0$.

$$(10 + 2x)(6 + 2x) - 10 \times 6 = 36$$

(à gauche l'aire totale du grand rectangle, dont on retire l'aire de la piscine.)

— On développe : $(10 + 2x)(6 + 2x) = 60 + 20x + 12x + 4x^2 = 4x^2 + 32x + 60$.

— L'équation devient $4x^2 + 32x + 60 - 60 = 36$, soit $4x^2 + 32x - 36 = 0$.

— On divise par 4 : $x^2 + 8x - 9 = 0$.

— **Discriminant** : $\Delta = 64 + 36 = 100$, $\sqrt{100} = 10$.

— **Racines** : $x_1 = \frac{-8 - 10}{2} = -9$ et $x_2 = \frac{-8 + 10}{2} = 1$.

— La largeur étant positive, on rejette -9 : la margelle mesure 1 m de large.

— **Vérification** : le grand rectangle mesure alors 12 m sur 8 m, soit 96 m^2 ; en retirant les 60 m^2 de la piscine, il reste bien $36 \text{ m}^2 \checkmark$

Réponse. $x = 1$ m.