

Plaquette 1 - Forme canonique et racines

Second degré — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour la forme canonique et les racines.

Un trinôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Forme canonique. Il existe deux réels α et β tels que

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et } \beta = f(\alpha)$$

- le **sommet** de la parabole est $S(\alpha; \beta)$ et l'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$;
- si $a > 0$, β est le **minimum** de f ; si $a < 0$, c'est son **maximum**.

Discriminant. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta > 0: x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Delta = 0: x_0 = -\frac{b}{2a} \quad \Delta < 0: \text{aucune racine}$$

Forme factorisée. Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$; si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Somme et produit des racines.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Contrôle systématique. Une forme canonique se vérifie en la **redéveloppant** ; une racine se vérifie en la **remplaçant** dans le trinôme.

Correction de l'exercice 1 - Repérer les coefficients

Un trinôme du second degré s'écrit sous sa **forme développée** :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

- $a = 3, b = -5, c = 2$.
- le terme en x est absent, donc $b = 0$: $a = -1, b = 0, c = 7$.
- le terme constant est absent, donc $c = 0$: $a = 1, b = 1, c = 0$.
- k n'est pas développé. On développe d'abord :
 $(x - 2)(x + 5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$, d'où $a = 1, b = 3, c = -10$.

Dans les quatre cas $a \neq 0$: ce sont bien des trinômes du second degré.

Réponse. a) 3 ; -5 ; 2 — b) -1 ; 0 ; 7 — c) 1 ; 1 ; 0 — d) 1 ; 3 ; -10.

Correction de l'exercice 2 - Un premier sommet

On utilise les formules du cours :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

- Ici $a = 1, b = -6$ et $c = 5$.
- **Abcisse du sommet** : $\alpha = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$.
- **Ordonnée du sommet** : $\beta = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$.
- **Forme canonique** :

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4$$

— **Contrôle par développement** : $(x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$ ✓

Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut : -4 est le **minimum** de f , atteint en $x = 3$.

Réponse. $S(3; -4)$ et $f(x) = (x - 3)^2 - 4$.

Correction de l'exercice 3 - Quand le sommet tombe sur une fraction

Même méthode, mais les valeurs ne sont plus entières : on garde des fractions, jamais des valeurs approchées.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$$

— **Ordonnée** : $\beta = f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 3$.

— On met tout sur 4 : $\frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{12}{4} = -\frac{13}{4}$.

— **Forme canonique** :

$$f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

— **Contrôle** : $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{13}{4} = x^2 + 5x + 3$ ✓

Le sommet est $S\left(-\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}\right)$, soit $S(-2,5; -3,25)$.

Réponse. $f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$.

Correction de l'exercice 4 - Ne pas oublier le coefficient devant le carré

Quand $a \neq 1$, le coefficient a reste **devant le carré** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

— $a = 2$, $b = -8$, $c = 3$.

— $\alpha = -\frac{-8}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$.

— $\beta = f(2) = 2 \times 4 - 16 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$.

— **Forme canonique** :

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$$

— **Contrôle** : $2(x^2 - 4x + 4) - 5 = 2x^2 - 8x + 8 - 5 = 2x^2 - 8x + 3$ ✓

Comme $(x - 2)^2 \geq 0$ et $a = 2 > 0$, on a $f(x) \geq -5$, avec égalité si et seulement si $x = 2$.

Le minimum de f vaut donc -5 et il est atteint en $x = 2$.

Réponse. $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$; minimum -5 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Une parabole tournée vers le bas

Le coefficient $a = -3$ est **négatif** : la parabole est tournée vers le bas, le sommet donne donc un **maximum**.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-3)} = -\frac{12}{-6} = 2$$

— $\beta = f(2) = -3 \times 4 + 12 \times 2 - 7 = -12 + 24 - 7 = 5.$

— **Forme canonique :**

$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 5$$

— **Contrôle :** $-3(x^2 - 4x + 4) + 5 = -3x^2 + 12x - 12 + 5 = -3x^2 + 12x - 7 \checkmark$

— Comme $-3(x - 2)^2 \leq 0$, on a $f(x) \leq 5$ pour tout x .

La hauteur maximale vaut 5, atteinte en $x = 2$.

Piège. Avec $a < 0$, le signe de α change deux fois : $-\frac{12}{-6}$ est bien **positif**.

Réponse. Maximum 5 atteint en $x = 2$; $f(x) = -3(x - 2)^2 + 5$.

Correction de l'exercice 6 - Lire le sommet sur le graphique

a) Le point le plus bas de la courbe se lit en $S(1 ; -4)$. L'axe de symétrie est la verticale passant par S , d'équation $x = 1$.

b) On connaît $a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = -4$, donc :

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4$$

On développe : $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$.

— c) La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 3$: ce sont les racines.

— **Contrôle par le produit :** $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$, et $(-1) \times 3 = -3 \checkmark$

— **Contrôle par la somme :** $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$, et $-1 + 3 = 2 \checkmark$

Les deux racines sont bien symétriques par rapport à l'axe $x = 1$: $1 - 2 = -1$ et $1 + 2 = 3$.

Réponse. $S(1 ; -4)$, axe $x = 1$, $f(x) = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$, racines -1 et 3 .

Correction de l'exercice 7 - L'erreur de Léa

Réfutation. Il suffit de développer ce que Léa propose :

$$(x + 3)^2 + 5 = x^2 + 6x + 9 + 5 = x^2 + 6x + 14$$

Or $x^2 + 6x + 14 \neq x^2 + 6x + 5$: les deux expressions diffèrent de 9. On peut aussi le voir en $x = 0$: à gauche 5, à droite 14.

La bonne forme canonique. L'erreur de Léa est d'avoir recopié le terme constant 5 au lieu de calculer β :

$$\alpha = -\frac{6}{2} = -3 \quad \beta = f(-3) = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$$

— **Contrôle :** $(x + 3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5 \checkmark$

Règle à retenir. Développer $(x + 3)^2$ fait apparaître $+9$ « en trop » : il faut le **retrancher** avant d'ajouter le terme constant de départ.

Réponse. Léa a écrit $x^2 + 6x + 14$; la forme correcte est $(x + 3)^2 - 4$.

Correction de l'exercice 8 - Du canonique au développé

a) On développe l'identité remarquable, puis on distribue -2 :

$$f(x) = -2(x^2 + 2x + 1) + 8 = -2x^2 - 4x - 2 + 8 = -2x^2 - 4x + 6$$

b) On part de la forme canonique, c'est la voie la plus courte :

$$-2(x+1)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4$$

— Un carré vaut 4 lorsque la quantité vaut 2 ou -2 :

$$x+1 = 2 \quad \text{ou} \quad x+1 = -2$$

— D'où $x = 1$ ou $x = -3$.

— **Contrôle** : $f(1) = -2 \times 4 + 8 = 0 \checkmark$ et $f(-3) = -2 \times 4 + 8 = 0 \checkmark$

Piège. $(x+1)^2 = 4$ ne donne pas seulement $x+1 = 2$: il ne faut **jamais oublier la solution négative**.

Réponse. $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$; $S = \{-3; 1\}$.

Correction de l'exercice 9 - Combien de racines ?

On calcule à chaque fois le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

a) $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$: **deux** racines distinctes.

b) $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$: **une** racine double.

c) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$: **aucune** racine réelle.

d) $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 5 = 9 + 40 = 49 > 0$: **deux** racines distinctes.

Piège du d). Avec a et c de signes contraires, $-4ac$ est positif : Δ est alors toujours strictement positif, il y a forcément deux racines.

Réponse. a) 2 — b) 1 (double) — c) 0 — d) 2.

Correction de l'exercice 10 - Deux racines à calculer

— **Discriminant** : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 5$.

— **Racines** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{7 + 5}{4} = 3$$

— **Forme factorisée** :

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$$

— **Contrôle** : $(2x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3 \checkmark$

— **Contrôle par somme et produit** : $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} = -\frac{-7}{2} \checkmark$ et $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \checkmark$

Réponse. $S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$ et $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$.

Correction de l'exercice 11 - Une racine double

— **Discriminant** : $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 9 \times 25 = 900 - 900 = 0$.

— Le discriminant est nul : il y a une seule racine, dite **double** :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

— **Forme factorisée** : $9x^2 - 30x + 25 = 9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = (3x - 5)^2$.

— **Contrôle** : $(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 \checkmark$

Interprétation graphique. La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses : elle le **touche** au point d'abscisse $\frac{5}{3}$, qui est aussi son sommet. L'axe des abscisses est tangent à la parabole en ce point.

Réponse. $S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$ (racine double) ; $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

Correction de l'exercice 12 - Un trinôme qui ne s'annule jamais

- **Discriminant** : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 4 - 48 = -44 < 0$.
- Un discriminant strictement négatif signifie : **aucune racine réelle**, donc f ne s'annule jamais.

Le signe. Le cours donne directement la conclusion : quand $\Delta < 0$, le trinôme garde le **signe de a** sur $\mathbb{R}$. Ici $a = 3 > 0$, donc $f(x) > 0$ partout.

Démonstration par la forme canonique, plus convaincante :

$$\alpha = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3} \quad \beta = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 4 = \frac{11}{3}$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

Le carré est positif ou nul, donc $f(x) \geq \frac{11}{3} > 0$: la parabole est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

Réponse. $\Delta = -44 < 0$; $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \geq \frac{11}{3} > 0$.

Correction de l'exercice 13 - La racine cachée

On utilise les relations entre coefficients et racines :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- a) **Vérification** : $4^2 - 9 \times 4 + 20 = 16 - 36 + 20 = 0 \checkmark$, donc 4 est bien racine.
- La somme des racines vaut $-\frac{-9}{1} = 9$, donc la seconde racine est $9 - 4 = 5$.
- **Contrôle par le produit** : $4 \times 5 = 20 = \frac{20}{1} \checkmark$
- b) **Vérification** : $2 + 3 - 5 = 0 \checkmark$, donc 1 est racine.
- Le produit des racines vaut $\frac{-5}{2}$, donc la seconde racine est $\frac{-5}{2} \div 1 = -\frac{5}{2}$.
- **Contrôle par la somme** : $1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \checkmark$

Méthode. Quand une racine « évidente » se voit (0, 1, -1, 2), les relations somme-produit donnent l'autre en une ligne.

Réponse. a) l'autre racine est 5 — b) l'autre racine est $-\frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver le trinôme à partir de son sommet

On part de la forme canonique, puisque le sommet est connu :

$$f(x) = a(x - 2)^2 - 3$$

- **On utilise le point A** : $f(0) = 5$, donc $a(0 - 2)^2 - 3 = 5$, c'est-à-dire $4a - 3 = 5$.
- D'où $4a = 8$ puis $a = 2$.
- **Forme canonique** : $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$.

— **Forme développée** : $2(x^2 - 4x + 4) - 3 = 2x^2 - 8x + 8 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$.

— **Contrôle** : $f(0) = 5$ ✓ et $f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$ ✓

Méthode générale. Sommet connu $\Rightarrow$ forme canonique ; un point supplémentaire suffit alors à déterminer a .

Réponse. $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$.

Correction de l'exercice 15 - Le lancer franc

a) La hauteur maximale est l'ordonnée du sommet :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,6}{2 \times (-0,05)} = -\frac{0,6}{-0,1} = 6$$

— $\beta = h(6) = -0,05 \times 36 + 0,6 \times 6 + 1,8 = -1,8 + 3,6 + 1,8 = 3,6$.

— Comme $a = -0,05 < 0$, il s'agit bien d'un **maximum** : le ballon monte à 3,6 m, à 6 m du lanceur.

— b) Le ballon touche le sol quand $h(x) = 0$. On multiplie l'équation par -20 pour se débarrasser des décimaux :

$$x^2 - 12x - 36 = 0$$

— $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times (-36) = 144 + 144 = 288$, et $\sqrt{288} = 12\sqrt{2} \approx 16,97$.

— $x = \frac{12 + 16,97}{2} \approx 14,5$ (l'autre racine, $\approx -2,5$, est négative donc hors sujet).

Le ballon retombe à environ 14,5 m du lanceur.

Réponse. a) 3,6 m à 6 m du lanceur — b) environ 14,5 m.

Correction de l'exercice 16 - Fabriquer un trinôme sur mesure

On part de la forme factorisée, c'est elle qui porte les racines :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - (-3))(x - 5) = 2(x + 3)(x - 5)$$

— **Développement** : $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$, donc $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$.

— **Contrôle** : $f(-3) = 18 + 12 - 30 = 0$ ✓ et $f(5) = 50 - 20 - 30 = 0$ ✓

Sommet. L'abscisse du sommet est le milieu des racines :

$$\alpha = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

— $\beta = f(1) = 2 - 4 - 30 = -32$.

— Forme canonique : $f(x) = 2(x - 1)^2 - 32$, qu'on contrôle en développant : $2x^2 - 4x + 2 - 32 = 2x^2 - 4x - 30$ ✓

Le sommet est $S(1; -32)$, et c'est un minimum puisque $a > 0$.

Réponse. $f(x) = 2(x + 3)(x - 5) = 2x^2 - 4x - 30$; $S(1; -32)$.