

Plaquette 4 - Problèmes d'optimisation

Second degré — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème de l'extremum. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

- si $a > 0$: f admet un **minimum** β en $x = \alpha$; elle décroît avant α , croît après ;
- si $a < 0$: f admet un **maximum** β en $x = \alpha$; elle croît avant α , décroît après.

Les six étapes d'un problème d'optimisation.

- **1.** Nommer l'inconnue avec son unité : « soit x la largeur, en mètres ».
- **2.** Écrire le **domaine** : $x > 0$, $x < 10$, $0 \leq x \leq 30$...
- **3.** Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x et la **développer**.
- **4.** Calculer α et β , donner la forme canonique.
- **5.** Vérifier que α appartient au domaine. **Sinon**, l'extremum est atteint à une **borne** du domaine, par monotonie.
- **6.** Conclure par une phrase, avec l'unité.

Formules utiles. Aire d'un rectangle $A = L \times \ell$; périmètre $P = 2(L + \ell)$; recette = prix $\times$ quantité ; bénéfice = recette - coût ; distance dans un repère orthonormé :

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

Astuce. Minimiser une distance revient à minimiser son **carré** : on évite ainsi la racine, et le minimum est atteint au même endroit.

Correction de l'exercice 1 - Minimum ou maximum ?

Le sens de l'extremum est donné par le **signe de a** :

$$a > 0 \Rightarrow \text{minimum} \quad a < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

- a) $a = 1 > 0$: minimum. $\alpha = \frac{4}{2} = 2$ et $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$.
- b) $a = -2 < 0$: maximum. $\alpha = -\frac{8}{-4} = 2$ et $g(2) = -8 + 16 = 8$.
- c) $a = 3 > 0$: minimum. $\alpha = -\frac{6}{6} = -1$ et $h(-1) = 3 - 6 + 5 = 2$.
- d) $a = -1 < 0$: maximum. $\alpha = -\frac{-6}{-2} = -3$ et $k(-3) = -9 + 18 = 9$.

Attention au signe de α en d) : b et $2a$ sont tous deux négatifs, et le signe moins de la formule rend α négatif.

Réponse. a) min -3 en 2 — b) max 8 en 2 — c) min 2 en -1 — d) max 9 en -3 .

Correction de l'exercice 2 - L'enclos contre le mur

- **Inconnue** : x la longueur des deux côtés perpendiculaires au mur, en mètres.
- **Domaine** : $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, donc $0 < x < 30$.
- **Aire** : le côté parallèle au mur mesure $60 - 2x$, donc

$$A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{60}{2 \times (-2)} = 15$, et $A(15) = 15 \times 30 = 450$.
- 15 appartient bien à $]0 ; 30[$, et $a = -2 < 0$: il s'agit d'un **maximum**.
- **Forme canonique** : $A(x) = -2(x - 15)^2 + 450$, ce qui confirme $A(x) \leq 450$.

L'aire maximale vaut 450 m², pour un enclos de 15 m sur 30 m.

Remarque. Sans le mur, l'enclos optimal serait un carré ; adossé à un mur, le côté parallèle au mur vaut **le double** de l'autre.

Réponse. 15 m $\times$ 30 m, soit une aire maximale de 450 m².

Correction de l'exercice 3 - Deux nombres de somme fixée

- **Inconnue** : x l'un des deux nombres ; l'autre vaut alors $20 - x$.
- **Produit à optimiser** :

$$P(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{20}{-2} = 10$ et $P(10) = 10 \times 10 = 100$.
- $a = -1 < 0$: c'est un maximum.
- **Forme canonique** : $P(x) = -(x - 10)^2 + 100$, donc $P(x) \leq 100$ pour tout x , avec égalité seulement si $x = 10$.

Le produit maximal vaut 100, obtenu pour deux nombres **égaux** à 10.

Un résultat à connaître. À somme fixée, le produit de deux nombres est maximal quand ils sont égaux. C'est la raison pour laquelle, à périmètre donné, le rectangle d'aire maximale est le carré.

Réponse. Produit maximal 100, pour 10 et 10.

Correction de l'exercice 4 - Somme des carrés minimale

- **Inconnue** : x le premier nombre, le second valant $12 - x$.
- **Expression à minimiser** :

$$S(x) = x^2 + (12 - x)^2 = x^2 + 144 - 24x + x^2 = 2x^2 - 24x + 144$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{-24}{2 \times 2} = 6$ et $S(6) = 72 - 144 + 144 = 72$.
- $a = 2 > 0$: c'est bien un **minimum**.
- **Forme canonique** : $S(x) = 2(x - 6)^2 + 72$, donc $S(x) \geq 72$.

La somme des carrés est minimale et vaut 72 lorsque les deux nombres valent 6 et 6.

- **Contrôle** : avec 5 et 7, on obtient $25 + 49 = 74 > 72$ ✓ ; avec 0 et 12, $144 > 72$ ✓

Réponse. Minimum 72, atteint pour 6 et 6.

Correction de l'exercice 5 - Le bénéfice de l'atelier

- a) **Sommet** : $\alpha = -\frac{90}{2 \times (-3)} = 15$, et

$$B(15) = -3 \times 225 + 90 \times 15 - 300 = -675 + 1350 - 300 = 375$$

- 15 appartient à $[0 ; 25]$ et $a = -3 < 0$: le bénéfice maximal vaut 375 € pour 150 pièces par jour.
- **Forme canonique** : $B(x) = -3(x - 15)^2 + 375$.

- b) Le bénéfice ne dépasse jamais son maximum :

$$B(x) = -3(x - 15)^2 + 375 \leq 375 < 500$$

- Un bénéfice de 500 € est donc **impossible** avec ce modèle.

Rédaction attendue. Répondre « non » ne suffit pas : c'est la forme canonique qui **démontre** que 500 est hors d'atteinte.

Réponse. a) 375 € pour 150 pièces — b) non, car $B(x) \leq 375$.

Correction de l'exercice 6 - Le prix de l'abonnement

- **Recette** = prix $\times$ nombre d'adhérents :

$$R(p) = p(2000 - 20p) = -20p^2 + 2000p$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{2000}{2 \times (-20)} = \frac{2000}{40} = 50$.

- $R(50) = 50 \times (2000 - 1000) = 50 \times 1000 = 50\,000$.

- $a = -20 < 0$ et $50 \in [0; 100]$: c'est bien un maximum.

Le club doit fixer l'abonnement à 50 € : il aura alors 1000 adhérents et une recette de 50 000 €.

- **Contrôle** : à 40 €, la recette vaut $40 \times 1200 = 48\,000$ € ; à 60 €, $60 \times 800 = 48\,000$ €
— deux valeurs inférieures, symétriques autour de 50 ✓

Interprétation. Augmenter le prix fait fuir des adhérents : au-delà de 50 €, la perte d'adhérents l'emporte sur le gain unitaire.

Réponse. Abonnement à 50 € : 1000 adhérents, recette maximale 50 000 €.

Correction de l'exercice 7 - Le rectangle inscrit dans le triangle

- **Domaine** : P est sur $[AB]$, donc $0 \leq x \leq 6$.

- **Hauteur du rectangle.** Dans le repère d'origine A , la droite (BC) passe par $B(6; 0)$ et $C(0; 8)$: son équation est $y = 8 - \frac{4}{3}x$. Le point Q a pour abscisse x , donc

$$AR = 8 - \frac{4}{3}x$$

- **Aire** :

$$A(x) = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{8}{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{8}{\frac{8}{3}} = 3$.

- $A(3) = 3 \times (8 - 4) = 12$.

- $a < 0$ et $3 \in [0; 6]$: l'aire maximale vaut 12 cm^2 , pour $x = 3 \text{ cm}$.

Le rectangle optimal a pour dimensions 3 cm et 4 cm : il occupe exactement **la moitié** de l'aire du triangle, qui vaut $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

Réponse. $x = 3 \text{ cm}$, aire maximale 12 cm^2 (rectangle 3×4).

Correction de l'exercice 8 - Le point le plus proche sur une droite

- **Paramétrage** : un point de d s'écrit $M(x; 2x - 1)$.

- **On minimise le carré de la distance**, pour éviter la racine :

$$AM^2 = (x - 3)^2 + (2x - 1 - 1)^2 = (x - 3)^2 + (2x - 2)^2$$

- On développe : $x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 8x + 4 = 5x^2 - 14x + 13$.
- **Sommet** : $\alpha = -\frac{-14}{2 \times 5} = \frac{14}{10} = 1,4$.
- $AM^2 = 5 \times 1,96 - 14 \times 1,4 + 13 = 9,8 - 19,6 + 13 = 3,2$.
- $a = 5 > 0$: c'est bien un minimum.
- **Coordonnées** : $M(1,4; 2 \times 1,4 - 1) = M(1,4; 1,8)$.
- **Distance** : $AM = \sqrt{3,2} \approx 1,79$.

Pourquoi minimiser le carré ? La fonction racine carrée est croissante : la distance et son carré atteignent leur minimum **au même endroit**. Le carré, lui, est un trinôme.

Réponse. $M(1,4; 1,8)$ et $AM = \sqrt{3,2} \approx 1,79$.

Correction de l'exercice 9 - Le fil coupé en deux

- **Domaine** : $0 < x < 40$.
- **Côtés des carrés** : $\frac{x}{4}$ et $\frac{40-x}{4}$.
- **Somme des aires** :

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{40-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2 + (40-x)^2}{16}$$

- On développe le numérateur : $x^2 + 1600 - 80x + x^2 = 2x^2 - 80x + 1600$, donc

$$A(x) = \frac{2x^2 - 80x + 1600}{16} = \frac{x^2}{8} - 5x + 100$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{-5}{2 \times \frac{1}{8}} = \frac{5}{\frac{1}{4}} = 20$.
- $A(20) = 50 - 100 + 100 = 50$.
- $a = \frac{1}{8} > 0$: c'est un minimum, atteint pour $x = 20$.

Il faut couper le fil **en deux parts égales** de 20 cm : on obtient deux carrés de côté 5 cm, d'aire totale 50 cm².

- **Contrôle** : avec $x = 16$, les côtés valent 4 et 6, l'aire totale $16 + 36 = 52 > 50$ ✓

Réponse. Deux morceaux de 20 cm ; aire totale minimale 50 cm².

Correction de l'exercice 10 - L'arche du pont

a) **Sommet** : $\alpha = -\frac{1,6}{2 \times (-0,04)} = \frac{1,6}{0,08} = 20$.

$$h(20) = -0,04 \times 400 + 1,6 \times 20 = -16 + 32 = 16$$

- L'arche culmine à 16 m, au milieu de sa portée de 40 m — ce qui est cohérent avec la symétrie de la parabole.
- b) On résout $h(x) = 12$:

$$-0,04x^2 + 1,6x = 12$$

- On multiplie par -25 : $x^2 - 40x + 300 = 0$.
- $\Delta = 1600 - 1200 = 400$, donc $\sqrt{\Delta} = 20$ et $x = \frac{40 \pm 20}{2}$, soit $x_1 = 10$ et $x_2 = 30$.
- À 12 m de hauteur, l'arche s'étend de 10 m à 30 m : sa largeur y est de $30 - 10 = 20$ m.
- **Contrôle** : $h(10) = -4 + 16 = 12$ ✓

Réponse. a) 16 m — b) 20 m de largeur (entre $x = 10$ et $x = 30$).

Correction de l'exercice 11 - Quand le sommet est hors du domaine

Le réflexe dangereux serait de répondre par le sommet sans regarder le domaine.

— **Sommet** : $\alpha = -\frac{-10}{2} = 5$ et $C(5) = 25 - 50 + 40 = 15$.

— Or $5 \notin [6; 12]$: ce minimum n'est **pas atteignable**.

On raisonne par le sens de variation. Comme $a = 1 > 0$, la fonction C est décroissante sur $] -\infty; 5]$ puis **croissante** sur $[5; +\infty[$. Le domaine $[6; 12]$ est entièrement situé après le sommet : C y est croissante.

x	6		12
C	16	croissante	64

— Le minimum sur $[6; 12]$ est donc atteint à la **borne gauche** : $C(6) = 36 - 60 + 40 = 16$.

— **Contrôle** : $C(7) = 49 - 70 + 40 = 19 > 16 \checkmark$ et $C(12) = 144 - 120 + 40 = 64 \checkmark$

Le coût minimal vaut 16 milliers d'euros, pour une production de 6 tonnes.

Réponse. Minimum 16 milliers d'euros pour $x = 6$ (le sommet $x = 5$ est hors domaine).

Correction de l'exercice 12 - Baisser le prix des billets ?

— **Prix** : $15 - x$ euros. **Nombre de spectateurs** : $400 + 40x$.

— **Recette** :

$$R(x) = (15 - x)(400 + 40x)$$

— On développe : $6000 + 600x - 400x - 40x^2 = -40x^2 + 200x + 6000$.

— **Sommet** : $\alpha = -\frac{200}{2 \times (-40)} = \frac{200}{80} = 2,5$.

— $R(2,5) = -40 \times 6,25 + 200 \times 2,5 + 6000 = -250 + 500 + 6000 = 6250$.

— $a = -40 < 0$ et $2,5 \in [0; 15]$: c'est un maximum.

Il faut baisser le prix de 2,50 €, soit un billet à 12,50 € : la salle accueille alors 500 spectateurs pour une recette de 6250 €.

— **Contrôle** : sans baisse, la recette vaut $15 \times 400 = 6000$ € ; avec une baisse de 5 €, $10 \times 600 = 6000$ € également. La baisse de 2,50 € fait bien mieux $\checkmark$

Réponse. Baisse de 2,50 € (billet à 12,50 €), recette maximale 6250 €.

Correction de l'exercice 13 - L'enclos partagé en deux

— **Inventaire du grillage** : les deux largeurs ($2x$), la cloison (x) et les deux longueurs. Il y a donc **trois** segments de longueur x :

$$3x + 2L = 90 \quad \text{d'où} \quad L = \frac{90 - 3x}{2}$$

— **Domaine** : $x > 0$ et $L > 0$, donc $0 < x < 30$.

— **Aire** :

$$A(x) = x \times \frac{90 - 3x}{2} = \frac{-3x^2 + 90x}{2} = -1,5x^2 + 45x$$

— **Sommet** : $\alpha = -\frac{45}{2 \times (-1,5)} = \frac{45}{3} = 15$.

— $A(15) = -1,5 \times 225 + 45 \times 15 = -337,5 + 675 = 337,5$.

— $a < 0$ et $15 \in]0; 30[$: c'est un maximum.

La largeur vaut 15 m, la longueur $\frac{90-45}{2} = 22,5$ m, pour une aire de 337,5 m².

— **Contrôle du grillage** : $3 \times 15 + 2 \times 22,5 = 45 + 45 = 90$ m ✓

Réponse. 15 m $\times$ 22,5 m, aire maximale 337,5 m².

Correction de l'exercice 14 - La vitesse la plus économique

a) **Sommet** :

$$\alpha = -\frac{-0,6}{2 \times 0,005} = \frac{0,6}{0,01} = 60$$

— $c(60) = 0,005 \times 3600 - 0,6 \times 60 + 30 = 18 - 36 + 30 = 12$.

— $a = 0,005 > 0$ et $60 \in [40; 110]$: la consommation est **minimale** à 60 km/h et vaut 12 L/100 km.

— b) On calcule les deux valeurs :

— $c(100) = 0,005 \times 10\,000 - 60 + 30 = 50 - 60 + 30 = 20$ L/100 km ;

— $c(40) = 0,005 \times 1600 - 24 + 30 = 8 - 24 + 30 = 14$ L/100 km.

— La consommation à 100 km/h est donc **supérieure** de 6 L/100 km à celle à 40 km/h.

Interprétation. Le modèle traduit un fait connu : rouler trop lentement comme trop vite fait consommer davantage, l'optimum se situant ici à 60 km/h.

Réponse. a) 60 km/h pour 12 L/100 km — b) 20 L contre 14 L : supérieure.

Correction de l'exercice 15 - Produire, mais combien ?

a) **Bénéfice = recette - coût** :

$$B(x) = -0,5x^2 + 40x - (10x + 150) = -0,5x^2 + 30x - 150$$

— **Sommet** : $\alpha = -\frac{30}{2 \times (-0,5)} = 30$.

— $B(30) = -0,5 \times 900 + 900 - 150 = -450 + 900 - 150 = 300$.

— $a < 0$: le bénéfice maximal vaut 300 centaines d'euros, soit 30 000 €, pour 30 tonnes.

— b) On résout $B(x) \geq 0$. En multipliant par -2 :

$$x^2 - 60x + 300 \leq 0$$

— $\Delta = 3600 - 1200 = 2400$ et $\sqrt{2400} \approx 48,99$.

— Racines : $x_1 = \frac{60 - 48,99}{2} \approx 5,5$ et $x_2 = \frac{60 + 48,99}{2} \approx 54,5$.

— Le trinôme en x est négatif entre ses racines : le producteur est bénéficiaire pour x compris entre 5,5 et 54,5 tonnes environ.

À noter. Au-delà de 54,5 tonnes, la recette plafonne alors que le coût continue de croître : produire plus fait perdre de l'argent.

Réponse. a) $B(x) = -0,5x^2 + 30x - 150$, maximum 30 000 € pour 30 t — b) de 5,5 t à 54,5 t environ.

Correction de l'exercice 16 - Les deux avions

— **Carré de la distance** (on évite la racine) :

$$AB^2 = (0 - (60t - 100))^2 + (80t - 0)^2 = (100 - 60t)^2 + (80t)^2$$

— On développe : $10\,000 - 12\,000t + 3600t^2 + 6400t^2$, soit

$$AB^2 = 10\,000t^2 - 12\,000t + 10\,000$$

- **Sommet** : $\alpha = -\frac{-12\,000}{2 \times 10\,000} = \frac{12\,000}{20\,000} = 0,6$.
- $AB^2 = 10\,000 \times 0,36 - 12\,000 \times 0,6 + 10\,000 = 3600 - 7200 + 10\,000 = 6400$.
- $a > 0$: c'est bien un minimum, et $AB = \sqrt{6400} = 80$.

Les avions sont au plus près au bout de 0,6 h, soit **36 minutes**, à une distance de 80 km l'un de l'autre.

- **Contrôle** : à $t = 0$, $AB = 100$ km ; à $t = 1$, $AB^2 = 10\,000 - 12\,000 + 10\,000 = 8000$, soit $AB \approx 89,4$ km — deux valeurs supérieures à 80 km ✓

Réponse. À $t = 0,6$ h (36 min), distance minimale 80 km.