

Plaquette 2 - Signe du trinôme

Second degré — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème du signe du trinôme. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

$f(x)$ est du signe de a partout, sauf strictement entre les racines quand elles existent

- $\Delta < 0$: pas de racine, $f(x)$ est **du signe de a sur $\mathbb{R}$** ;
- $\Delta = 0$: une racine double x_0 , $f(x)$ est du signe de a et s'annule en x_0 ;
- $\Delta > 0$: deux racines $x_1 < x_2$, $f(x)$ est du signe de $-a$ sur $]x_1 ; x_2[$ et du signe de a à l'extérieur.

Méthode pour une inéquation.

- **1.** Tout ramener d'un seul côté pour comparer à 0.
- **2.** Calculer Δ , puis les racines si elles existent.
- **3.** Dresser le tableau de signes.
- **4.** Lire l'ensemble solution, en choisissant crochets **ouverts** ($<$, $>$) ou **fermés** ($\leq$, $\geq$).

Position relative de deux courbes. On étudie le signe de la différence :

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow C_f \text{ est au-dessus de } C_g$$

Quotient. On étudie séparément le signe du numérateur et celui du dénominateur, et on **exclut** la valeur qui annule le dénominateur.

Correction de l'exercice 1 - Conclure sans calculer les racines

On applique le théorème du cours :

le trinôme est du signe de a , sauf entre les racines

- a) $\Delta < 0$: pas de racine, le trinôme garde le signe de $a = 3 > 0$, donc il est **strictement positif** sur $\mathbb{R}$.
- b) $\Delta < 0$ et $a = -5 < 0$: le trinôme est **strictement négatif** sur $\mathbb{R}$.
- c) $\Delta = 0$: le trinôme est **positif** partout et s'annule en une seule valeur, la racine double.
- d) $\Delta > 0$ et $a = -1 < 0$: le trinôme est **positif entre les deux racines** et négatif à l'extérieur.

À retenir. Un trinôme de discriminant négatif ne change jamais de signe : c'est l'argument le plus utile pour justifier qu'une expression reste positive.

Réponse. a) positif sur $\mathbb{R}$ — b) négatif sur $\mathbb{R}$ — c) positif, nul en une valeur — d) positif entre les racines.

Correction de l'exercice 2 - Premier tableau de signes

- **Discriminant** : $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.

- **Signe de a** : $a = 1 > 0$, donc f est positif à l'extérieur de $[1 ; 3]$ et négatif entre les racines.

Intervalle	$] -\infty ; 1[$	$] 1 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	+	−	+

Le trinôme s'annule en $x = 1$ et en $x = 3$.

- **Contrôle par une valeur test** : $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 < 0$, ce qui confirme le signe − entre les racines ✓

Réponse. $f(x) > 0$ sur $] -\infty ; 1[\cup] 3 ; +\infty[$, $f(x) < 0$ sur $] 1 ; 3[$.

Correction de l'exercice 3 - Avec un coefficient dominant négatif

- **Discriminant** : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 5$.

- **Racines** :

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2 \times (-1)} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

- $x_1 = \frac{-1 + 5}{-2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1 - 5}{-2} = 3$.

- **Signe de a** : $a = -1 < 0$, donc g est **négatif** à l'extérieur des racines et **positif** entre elles.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $g(x)$	−	+	−

- **Contrôle** : $g(0) = 6 > 0$, et 0 est bien entre -2 et 3 ✓

Piège. Avec $a < 0$, le dénominateur $2a$ est négatif : la plus grande racine correspond au **signe moins** au numérateur.

Réponse. $g(x) > 0$ sur $] -2 ; 3[$, $g(x) < 0$ sur $] -\infty ; -2[\cup] 3 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4 - Le cas de la racine double

- **Discriminant** : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$.

- Il y a une **racine double** :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- **Forme factorisée** : $h(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2x - 1)^2$.

- **Contrôle** : $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ ✓

Un carré est toujours positif ou nul : $h(x) \geq 0$ pour tout réel x , avec égalité uniquement pour $x = \frac{1}{2}$.

Intervalle	$\left[-\infty ; \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right]$
Signe de $h(x)$	+	+

Graphiquement, la parabole reste au-dessus de l'axe des abscisses et le touche en un seul point.

Réponse. $h(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, avec $h(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Justifier qu'une expression reste positive

Méthode 1 — le discriminant.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0$$

Le trinôme n'a pas de racine réelle : il garde donc le signe de $a = 1 > 0$. Ainsi $x^2 + x + 3 > 0$ pour tout réel x .

Méthode 2 — la forme canonique, qui donne en plus le minimum :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{4}$$

$$x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

La somme d'un carré et de $\frac{11}{4}$ est au moins égale à $\frac{11}{4}$, donc strictement positive. Le minimum de l'expression vaut $\frac{11}{4} = 2,75$.

Réponse. $\Delta = -11 < 0$ et $a > 0$: $x^2 + x + 3 \geq \frac{11}{4} > 0$.

Correction de l'exercice 6 - Première inéquation

- **Discriminant** : $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 3$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.
- $a = 1 > 0$: le trinôme est **négatif entre les racines**.

Intervalle	$] -\infty ; 1[$	$] 1 ; 4[$	$] 4 ; +\infty [$
Signe de $x^2 - 5x + 4$	+	-	+

L'inégalité est **large** ($\leq$) : les racines, où le trinôme vaut 0, font partie des solutions.

$$S = [1 ; 4]$$

- **Contrôle** : pour $x = 2$, $4 - 10 + 4 = -2 \leq 0$ ✓ ; pour $x = 0$, $4 > 0$, donc 0 n'est pas solution ✓

Réponse. $S = [1 ; 4]$.

Correction de l'exercice 7 - Simplifier avant de résoudre

Astuce. On divise les deux membres par -2 , ce qui **change le sens** de l'inégalité et simplifie tous les calculs :

$$-2x^2 + 8x - 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$$

- **Discriminant** : $\Delta = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$.
- **Racines** : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
- $a = 1 > 0$: le trinôme est négatif **strictement entre** 1 et 3.

L'inégalité étant stricte, les bornes sont exclues :

$$S =]1 ; 3[$$

- **Contrôle sur l'expression de départ** : pour $x = 2$, $-8 + 16 - 6 = 2 > 0$ ✓ ; pour $x = 0$, $-6 < 0$ ✓

Piège. Diviser par un nombre négatif retourne l'inégalité : oublier ce retournement donne l'ensemble complémentaire.

Réponse. $S =]1 ; 3[$.

Correction de l'exercice 8 - Tout ramener d'un côté

On ne peut appliquer le théorème du signe que sur une expression comparée à 0 : on commence donc par tout regrouper.

$$x^2 + 3 \leq 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

- **Discriminant** : $\Delta = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.
- $a = 1 > 0$: le trinôme est négatif ou nul sur $[1 ; 3]$.

$$S = [1 ; 3]$$

- **Contrôle** : pour $x = 2$, on compare $4 + 3 = 7$ à $4 \times 2 = 8$: on a bien $7 \leq 8$ ✓ ; pour $x = 5$, $28 \leq 20$ est faux ✓

Erreur classique : simplifier par x de chaque côté. C'est interdit, x pouvant être nul ou négatif.

Réponse. $S = [1 ; 3]$.

Correction de l'exercice 9 - Une inéquation vraie partout

On regroupe tout à gauche :

$$2x^2 + 3 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

- **Discriminant** : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 16 - 32 = -16 < 0$.
- Pas de racine réelle : le trinôme garde le signe de $a = 2 > 0$, il est donc **strictement positif** sur $\mathbb{R}$.

$$S = \mathbb{R}$$

Interprétation graphique. La parabole d'équation $y = 2x^2 + 3$ est **toujours au-dessus** de la droite d'équation $y = 4x - 1$: elles ne se coupent jamais.

- **Contrôle** : la forme canonique $2x^2 - 4x + 4 = 2(x - 1)^2 + 2$ montre que l'écart entre les deux courbes vaut au minimum 2, atteint en $x = 1$.

Réponse. $S = \mathbb{R}$: l'écart vaut $2(x - 1)^2 + 2 \geq 2$.

Correction de l'exercice 10 - Position relative de deux courbes

On étudie le signe de la différence :

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - (x - 2) = x^2 - 3x + 2$$

- **Discriminant** : $\Delta = 9 - 8 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$.
- **Racines** : $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.
- $a = 1 > 0$: la différence est positive à l'extérieur de $[1 ; 2]$.

Intervalle	$] -\infty ; 1[$	$] 1 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $f(x) - g(x)$	+	-	+

Conclusion. C_f est au-dessus de C_g sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 2 ; +\infty[$, en dessous sur $] 1 ; 2[$. Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 1 et 2.

- **Contrôle** : $f(1) = -1 = g(1)$ ✓ et $f(2) = 0 = g(2)$ ✓

Réponse. C_f au-dessus sur $] -\infty ; 1[\cup] 2 ; +\infty[$, en dessous sur $] 1 ; 2[$.

Correction de l'exercice 11 - Un quotient à étudier

Domaine. Le dénominateur s'annule en $x = 1$: cette valeur est **exclue**.

Numérateur. $\Delta = 1 + 24 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, donc $x = \frac{1 \pm 5}{2}$: les racines sont -2 et 3 . Comme $a = 1 > 0$, le numérateur est négatif entre -2 et 3 .

Dénominateur. $x - 1$ est négatif avant 1 , positif après.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 1[$	$] 1 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $x^2 - x - 6$	+	-	-	+
Signe de $x - 1$	-	-	+	+
Signe du quotient	-	+	-	+

Le quotient est positif ou nul sur $[-2 ; 1[$ et sur $[3 ; +\infty[$: on ferme en -2 et 3 (le quotient y vaut 0) mais on ouvre en 1 (valeur interdite).

$$S = [-2 ; 1[\cup [3 ; +\infty[$$

Réponse. $S = [-2 ; 1[\cup [3 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 12 - Un facteur qui ne change pas de signe

Le second facteur d'abord. Son discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

Il n'a donc pas de racine et garde le signe de $a = 1 > 0$: $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x .

Conséquence. Le signe du produit est celui du premier facteur seul :

$$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

— $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, de racines -1 et 1 , avec $a = 1 > 0$: ce trinôme est négatif entre ses racines.

$$S = [-1 ; 1]$$

— **Contrôle** : pour $x = 0$, le produit vaut $(-1) \times 1 = -1 \leq 0$ ✓ ; pour $x = 2$, il vaut $3 \times 7 = 21 > 0$ ✓

Méthode. Repérer un facteur de signe constant divise le travail par deux.

Réponse. $S = [-1 ; 1]$.

Correction de l'exercice 13 - Discuter selon un paramètre

Le coefficient dominant vaut $1 > 0$. Un tel trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** il n'a aucune racine, c'est-à-dire si son discriminant est strictement négatif :

$$\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 9 = m^2 - 36 < 0$$

— On résout cette inéquation **en** m : $m^2 - 36 = (m - 6)(m + 6)$, de racines -6 et 6 , avec un coefficient dominant positif.

— Ce trinôme en m est donc négatif **entre** ses racines.

$$m \in]-6 ; 6[$$

— **Contrôle avec** $m = 0$: $x^2 + 9 > 0$, vrai pour tout x ✓

— **Contrôle avec** $m = 10$: $x^2 + 10x + 9 = (x + 1)(x + 9)$ s'annule en -1 , donc n'est pas strictement positif partout ✓

Attention aux bornes. Pour $m = 6$, $\Delta = 0$ et le trinôme $(x + 3)^2$ s'annule : l'inégalité stricte est fautive, la borne est bien exclue.

Réponse. $m \in]-6; 6[$.

Correction de l'exercice 14 - Lire le signe sur la parabole

- a) La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 3$.
 b) $f(x) \geq 0$ signifie « la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, ou dessus ». C'est le cas entre les deux racines :

$$S = [-1; 3]$$

- **Par le calcul** : $\Delta = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$, donc $x = \frac{-2 \pm 4}{-2}$, soit $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif **entre** les racines ✓

- c) $f(x) \geq 3$ revient à $-x^2 + 2x + 3 \geq 3$, soit $-x^2 + 2x \geq 0$, c'est-à-dire $x(2 - x) \geq 0$. Ce produit est positif ou nul entre 0 et 2 :

$$S = [0; 2]$$

Graphiquement, ce sont les abscisses pour lesquelles la courbe est au-dessus de la droite horizontale d'ordonnée 3.

Réponse. a) -1 et 3 — b) $[-1; 3]$ — c) $[0; 2]$.

Correction de l'exercice 15 - Quand l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

- a) On résout $-x^2 + 70x - 600 \geq 0$. Le discriminant vaut :

$$\Delta = 70^2 - 4 \times (-1) \times (-600) = 4900 - 2400 = 2500$$

- $\sqrt{\Delta} = 50$, donc $x = \frac{-70 \pm 50}{-2}$, soit $x_1 = \frac{-20}{-2} = 10$ et $x_2 = \frac{-120}{-2} = 60$.

- $a = -1 < 0$: le trinôme est positif **entre** les racines. Compte tenu de la contrainte $0 \leq x \leq 70$:

$$S = [10; 60]$$

- L'entreprise est bénéficiaire entre 1000 et 6000 objets par jour.
 — b) Le maximum est atteint au sommet :

$$\alpha = -\frac{70}{2 \times (-1)} = 35 \quad \beta = B(35) = -1225 + 2450 - 600 = 625$$

- Le bénéfice maximal vaut 625 centaines d'euros, soit 62 500 €, pour 3500 objets produits.

Réponse. a) $[10; 60]$, soit de 1000 à 6000 objets — b) 62 500 € pour 3500 objets.

Correction de l'exercice 16 - L'enclos rectangulaire

- a) Le périmètre vaut 20 m, donc la somme de la largeur et de la longueur vaut 10 m : la longueur est $10 - x$.

$$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

- b) On résout $-x^2 + 10x \geq 21$, soit :

$$-x^2 + 10x - 21 \geq 0$$

- $\Delta = 100 - 4 \times (-1) \times (-21) = 100 - 84 = 16$, donc $\sqrt{\Delta} = 4$.

- $x = \frac{-10 \pm 4}{-2}$: $x_1 = 3$ et $x_2 = 7$.

- $a = -1 < 0$: l'expression est positive entre les racines, et $[3; 7]$ est bien inclus dans $]0; 10[$.

L'aire atteint au moins 21 m^2 pour une largeur comprise entre 3 m et 7 m.

- **Contrôle** : pour $x = 3$, l'aire vaut $3 \times 7 = 21$ ✓ ; pour $x = 5$ (le carré), elle vaut 25, qui est le maximum ✓

Réponse. a) $A(x) = -x^2 + 10x$ — b) $x \in [3; 7]$.