

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : paramètres, optimisation et modélisation

Second degré — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois formes d'un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

développée $ax^2 + bx + c$ canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

— $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

— $\Delta = 0$: une racine **double** $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

— $\Delta < 0$: **aucune** racine réelle, le trinôme garde le signe de a .

Signe du trinôme. Il est **du signe de** a partout, **sauf entre les racines** quand elles existent.

Somme et produit des racines.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Sommet de la parabole : $S(\alpha; \beta)$. Si $a > 0$, β est le **minimum** de f ; si $a < 0$, c'est le **maximum**. L'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$.

Méthode pour un paramètre. On exprime Δ en fonction du paramètre, puis on **résout une inéquation** du second degré en ce paramètre.

Modélisation d'une optimisation. On nomme l'inconnue, on exprime la quantité à optimiser sous la forme d'un trinôme, on écrit la forme canonique et on **conclut par le sommet** — sans oublier de vérifier que la valeur trouvée appartient au domaine autorisé.

Correction de l'exercice 1 - Les trois formes

— **Forme canonique** : $\alpha = -\frac{-12}{4} = 3$ et $\beta = f(3) = 18 - 36 + 10 = -8$.

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$$

— **Contrôle par développement** :

$$2(x^2 - 6x + 9) - 8 = 2x^2 - 12x + 18 - 8 = 2x^2 - 12x + 10 \quad \checkmark$$

— **Racines** : $2(x - 3)^2 = 8$ donne $(x - 3)^2 = 4$, donc $x - 3 = \pm 2$ et $x \in \{1; 5\}$.

— **Forme factorisée** :

$$f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$$

— **Contrôle par le discriminant** : $\Delta = 144 - 80 = 64$, $\sqrt{\Delta} = 8$, donc $x = \frac{12 \pm 8}{4} \in \{1; 5\}$
✓

— **Somme et produit** : $1 + 5 = 6 = -\frac{-12}{2}$ ✓ et $1 \times 5 = 5 = \frac{10}{2}$ ✓

— **Sommet** : $S(3; -8)$, **minimum** puisque $a = 2 > 0$.

Réponse. $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8 = 2(x - 1)(x - 5)$; $S(3; -8)$.

Correction de l'exercice 2 - Équation avec paramètre

— **Discriminant** :

$$\Delta = 4m^2 - 4(m + 2) = 4(m^2 - m - 2)$$

— **Racines du discriminant** : $m^2 - m - 2 = 0$ a pour discriminant $1 + 8 = 9$, donc $m = \frac{1 \pm 3}{2} \in \{-1; 2\}$.

— **Factorisation** : $\Delta = 4(m + 1)(m - 2)$.

— **Signe** : ce trinôme en m est positif à l'**extérieur** de ses racines (coefficient positif).

— **Conclusion** :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

— **Vérifications** : pour $m = 3$, $\Delta = 4 \times 4 \times 1 = 16 > 0 \checkmark$ et l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ a bien pour racines 1 et 5.

— Pour $m = 0$, $\Delta = 4 \times 1 \times (-2) = -8 < 0 \checkmark$ et $x^2 + 2 = 0$ n'a effectivement pas de solution.

— **Cas limites** : pour $m = -1$ et $m = 2$, $\Delta = 0$ — racine double, exclue par l'énoncé (« distinctes »).

Réponse. $m < -1$ ou $m > 2$.

Correction de l'exercice 3 - Inéquation du second degré

— **Discriminant** : $\Delta = 25 + 24 = 49$, donc $\sqrt{\Delta} = 7$.

— **Racines** :

$$x = \frac{-5 \pm 7}{-6} \quad \text{soit} \quad x_1 = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-12}{-6} = 2$$

— **Signe** : $a = -3 < 0$, donc le trinôme est **positif entre** les racines.

— **Solution** :

$$S = \left[-\frac{1}{3}; 2 \right]$$

— **Contrôle en** $x = 0$ (intérieur) : $2 \geq 0 \checkmark$

— **Contrôle en** $x = 3$ (extérieur) : $-27 + 15 + 2 = -10 < 0 \checkmark$

— **Contrôle des bornes** : $-3 \times \frac{1}{9} - \frac{5}{3} + 2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + 2 = 0 \checkmark$ et $-12 + 10 + 2 = 0 \checkmark$

— **Attention** : les crochets sont **fermés** car l'inégalité est large ($\geq$).

Réponse. $S = \left[-\frac{1}{3}; 2 \right]$.

Correction de l'exercice 4 - Somme et produit

— **Méthode** : ces nombres sont les racines du trinôme $x^2 - Sx + P$, soit

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 49 - 40 = 9$, donc $\sqrt{\Delta} = 3$.

— **Racines** : $x = \frac{7 \pm 3}{2}$, soit $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$.

— **Vérifications** : $2 + 5 = 7 \checkmark$ et $2 \times 5 = 10 \checkmark$

- **Pourquoi ça marche** : si x_1 et x_2 sont racines de $x^2 - Sx + P$, alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1x_2 = P$ d'après les relations coefficients-racines.
- **Cas d'impossibilité** : avec $S = 2$ et $P = 5$, on aurait $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ — aucun couple de **réels** ne convient. La condition d'existence est $S^2 \geq 4P$.
- **Vérification de cette condition** ici : $49 \geq 40$ ✓

Réponse. 2 et 5.

Correction de l'exercice 5 - Optimisation d'une aire

- **Notations** : x la largeur (deux côtés perpendiculaires au mur), y la longueur parallèle au mur.
- **Contrainte** : $2x + y = 40$, donc $y = 40 - 2x$.
- **Aire** :

$$A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$$

- **Domaine** : $0 < x < 20$ (pour que $y > 0$).
- **Forme canonique** : $\alpha = -\frac{40}{-4} = 10$ et $\beta = A(10) = -200 + 400 = 200$.

$$A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$$

- **Conclusion** : l'aire est maximale pour $x = 10$ m, et vaut 200 m^2 .
- **Dimensions** : $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$.
- **Contrôles** : $2 \times 10 + 20 = 40$ m de grillage ✓ et $10 \times 20 = 200 \text{ m}^2$ ✓
- **Comparaisons** : $x = 8$ donne $8 \times 24 = 192 \text{ m}^2$; $x = 12$ donne $12 \times 16 = 192 \text{ m}^2$ — l'aire est bien maximale au centre, et **symétrique** autour de $x = 10$ ✓
- **Remarque** : sans mur, l'optimum serait un **carré** ; avec le mur, la longueur vaut le **double** de la largeur.

Réponse. $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$, pour une aire de 200 m^2 .

Correction de l'exercice 6 - Trinôme toujours positif

- **Condition** : $a = 1 > 0$, donc le trinôme est strictement positif partout si et seulement si $\Delta < 0$.
- **Discriminant** : $\Delta = m^2 - 36$.
- **Inéquation** : $m^2 - 36 < 0$, soit $m^2 < 36$, donc

$$-6 < m < 6$$
- **Vérifications** : pour $m = 0$, $x^2 + 9 \geq 9 > 0$ ✓
- Pour $m = 6$, le trinôme vaut $(x + 3)^2$, qui **s'annule** en $x = -3$ — l'inégalité stricte est donc fausse, ce qui justifie l'exclusion de 6 ✓
- Pour $m = 10$, $\Delta = 64 > 0$ et le trinôme est négatif entre ses racines -1 et -9 : par exemple en $x = -5$, $25 - 50 + 9 = -16 < 0$ ✓
- **Lecture géométrique** : la parabole est tournée vers le haut ; la condition $\Delta < 0$ signifie qu'elle **ne touche pas** l'axe des abscisses.
- **Variante** : si l'énoncé demandait ≥ 0 , il faudrait $\Delta \leq 0$, donc $m \in [-6; 6]$.

Réponse. $m \in]-6; 6[$.

Correction de l'exercice 7 - Position relative de deux courbes

- **Différence** :

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 1 - 2x + 5 = x^2 - 5x + 6$$

- **Racines** : $\Delta = 25 - 24 = 1$, donc $x = \frac{5 \pm 1}{2} \in \{2; 3\}$.
- **Factorisation** : $f(x) - g(x) = (x - 2)(x - 3)$.
- **Signe** : positif à l'extérieur de $[2; 3]$, négatif à l'intérieur.
- **Conclusion** :
- C_f est **au-dessus** de D_g sur $] -\infty; 2]$ et sur $[3; +\infty[$;
- C_f est **en dessous** sur $[2; 3]$;
- les courbes se **coupent** en $x = 2$ et $x = 3$.
- **Points d'intersection** : $g(2) = -1$ et $g(3) = 1$, donc $A(2; -1)$ et $B(3; 1)$.
- **Contrôles** : $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1 \checkmark$ et $f(3) = 9 - 9 + 1 = 1 \checkmark$
- **Contrôle intermédiaire** : en $x = 2,5$, $f(2,5) = 6,25 - 7,5 + 1 = -0,25$ et $g(2,5) = 0$ — la parabole est bien en dessous $\checkmark$

Réponse. Intersection en $A(2; -1)$ et $B(3; 1)$; C_f en dessous sur $[2; 3]$, au-dessus ailleurs.

Correction de l'exercice 8 - Équation bicarrée

- **Changement d'inconnue** : on pose $X = x^2$ (avec $X \geq 0$), ce qui donne

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$
- **Résolution** : $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc $X = \frac{5 \pm 3}{2} \in \{1; 4\}$.
- **Retour à x** : $x^2 = 1$ donne $x = \pm 1$, et $x^2 = 4$ donne $x = \pm 2$.
- **Solutions** :

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$
- **Vérifications** : $1 - 5 + 4 = 0 \checkmark$ et $16 - 20 + 4 = 0 \checkmark$
- **Factorisation complète** : $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ $\checkmark$
- **Point de vigilance** : il faut **écarter** les valeurs négatives de X . Par exemple pour $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$, on trouve $X \in \{1; -4\}$, et seul $X = 1$ est exploitable : les solutions sont alors ± 1 seulement.
- **Symétrie** : l'équation ne contient que des puissances **paires**, donc l'ensemble des solutions est symétrique par rapport à 0 $\checkmark$

Réponse. $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Correction de l'exercice 9 - Racine connue

- **Condition** : $f(2) = 0$, soit $12 + 2b - 6 = 0$, donc $2b = -6$ et

$$b = -3$$
- **Trinôme** : $f(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$.
- **Autre racine par le produit** : $x_1 x_2 = \frac{-6}{3} = -2$, donc $2x_2 = -2$ et $x_2 = -1$.
- **Contrôle par la somme** : $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{3} = 1$, et $2 + (-1) = 1 \checkmark$
- **Vérification directe** : $f(-1) = 3 + 3 - 6 = 0 \checkmark$
- **Forme factorisée** : $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$.
- **Contrôle par développement** : $3(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 3x - 6 \checkmark$
- **Méthode alternative** : le discriminant $\Delta = 9 + 72 = 81$ donne $x = \frac{3 \pm 9}{6} \in \{2; -1\} \checkmark$ — plus long, mais indépendant de la racine fournie.

Réponse. $b = -3$ et l'autre racine est -1 .

Correction de l'exercice 10 - Problème de bénéfice

- **Rentabilité** : il faut $B(x) > 0$, soit $-2x^2 + 24x - 40 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 12x + 20 < 0$ (division par -2 , sens **inversé**).
 - **Racines** : $\Delta = 144 - 80 = 64$, donc $x = \frac{12 \pm 8}{2} \in \{2; 10\}$.
 - **Plage de rentabilité** : $2 < x < 10$, soit entre 200 et 1000 articles.
 - **Bénéfice maximal** : $\alpha = -\frac{24}{-4} = 6$ et $\beta = B(6) = -72 + 144 - 40 = 32$.

$$B(x) = -2(x - 6)^2 + 32$$
 - **Conclusion** : bénéfice maximal de 32 000 € pour 600 articles.
 - **Contrôles** : $B(2) = -8 + 48 - 40 = 0 \checkmark$ et $B(10) = -200 + 240 - 40 = 0 \checkmark$
 - **Contrôle du sommet** : 6 est bien le **milieu** de $[2; 10] \checkmark$ — l'axe de symétrie passe par le milieu des racines.
 - **Lecture économique** : produire moins de 200 ou plus de 1000 articles fait perdre de l'argent ; l'optimum n'est pas le maximum de production mais 600 articles.
- Réponse.** Rentable entre 200 et 1000 articles ; maximum de 32 000 € pour 600 articles.

Correction de l'exercice 11 - Système et second degré

- **Identité remarquable** : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, donc $25 = 13 + 2xy$ et $xy = 6$.
 - **Somme et produit** : x et y sont les racines de

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$
 - **Résolution** : $\Delta = 25 - 24 = 1$, donc $t = \frac{5 \pm 1}{2} \in \{2; 3\}$.
 - **Solutions** : $(x; y) = (2; 3)$ ou $(3; 2)$.
 - **Vérifications** : $2 + 3 = 5 \checkmark$ et $4 + 9 = 13 \checkmark$
 - **Interprétation géométrique** : on cherche l'intersection d'une **droite** et d'un **cercle** de rayon $\sqrt{13} \approx 3,606$ centré à l'origine — deux points, cohérent avec les deux couples trouvés.
 - **Cas sans solution** : avec $x^2 + y^2 = 10$, on aurait $xy = 7,5$ et $\Delta = 25 - 30 = -5 < 0$: la droite ne couperait pas le cercle, trop petit.
 - **Condition d'existence** : il faut $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} = 12,5$, atteint quand $x = y = 2,5$.
- Réponse.** $(2; 3)$ et $(3; 2)$.

Correction de l'exercice 12 - Tangente à une parabole

- **Intersection** : $x^2 = 4x + m$, soit $x^2 - 4x - m = 0$.
- **Tangence** = une **seule** solution, donc $\Delta = 0$:

$$\Delta = 16 + 4m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -4$$
- **Point de contact** : l'équation devient $x^2 - 4x + 4 = 0$, soit $(x - 2)^2 = 0$ et $x = 2$.
- **Point** : $T(2; 4)$.
- **Vérifications** : la droite $y = 4x - 4$ passe par $(2; 4) \checkmark$ et la parabole aussi ($2^2 = 4$) $\checkmark$
- **Contrôle par la dérivée** : la dérivée de x^2 vaut $2x$, qui égale 4 pour $x = 2$ — la pente de la parabole en ce point est bien 4 $\checkmark$
- **Vérification du caractère tangent** : $x^2 - (4x - 4) = (x - 2)^2 \geq 0$, donc la parabole est **toujours au-dessus** de la droite, et ne la touche qu'en $x = 2 \checkmark$
- **Cas $m > -4$** : deux points d'intersection ; **cas $m < -4$** : aucun.

Réponse. $m = -4$, point de contact $T(2; 4)$.

Correction de l'exercice 13 - Discussion complète

Cas $m = 0$. L'équation devient $-4x + 1 = 0$, du **premier degré** : une solution, $x = \frac{1}{4}$.

Cas $m \neq 0$. Le discriminant vaut

$$\Delta = 16 - 4m$$

- $\Delta > 0$: $m < 4$ (avec $m \neq 0$) → **deux** solutions.
- $\Delta = 0$: $m = 4$ → **une** solution double, $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
- $\Delta < 0$: $m > 4$ → **aucune** solution.

Récapitulatif.

- $m = 0$: une solution ($\frac{1}{4}$).
- $m < 4$ avec $m \neq 0$: deux solutions.
- $m = 4$: une solution ($\frac{1}{2}$).
- $m > 4$: aucune solution.
- **Vérifications** : pour $m = 4$, $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ ✓ ; pour $m = 5$, $\Delta = -4 < 0$ ✓ ; pour $m = 1$, $\Delta = 12 > 0$ et $x = 2 \pm \sqrt{3}$ ✓
- **Piège majeur** : oublier le cas $m = 0$, où l'équation **n'est plus** du second degré — le discriminant n'a alors aucun sens.

Réponse. $m = 0$ ou $m = 4$: une solution · $m < 4$ et $m \neq 0$: deux · $m > 4$: aucune.

Correction de l'exercice 14 - Trajectoire d'un projectile

- **Hauteur maximale** : $\alpha = -\frac{15}{-10} = 1,5$ s et $\beta = h(1,5) = -11,25 + 22,5 + 1 = 12,25$ m.

$$h(t) = -5(t - 1,5)^2 + 12,25$$
- **Réponse** : hauteur maximale de 12,25 m atteinte au bout de 1,5 s.
- **Retour au sol** : $h(t) = 0$, soit $-5t^2 + 15t + 1 = 0$, avec $\Delta = 225 + 20 = 245$.
- $\sqrt{245} \approx 15,6525$, donc $t = \frac{-15 \pm 15,6525}{-10}$.
- Les deux racines sont $t \approx -0,0652$ (à rejeter, antérieure au lancer) et

$$t \approx 3,0652$$
 s
- **Vérification** : $h(3,0652) = -5 \times 9,3955 + 45,978 + 1 \approx 0,0006 \approx 0$ ✓
- **Contrôle de cohérence** : la hauteur initiale est $h(0) = 1$ m (hauteur de lâcher), et le sommet est à 1,5 s — la descente dure un peu **plus** que la montée (1,565 s contre 1,5 s), ce qui est logique puisque le ballon part de 1 m et retombe à 0 ✓

Réponse. 12,25 m à $t = 1,5$ s ; retour au sol vers $t \approx 3,07$ s.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : boîte de volume maximal

a) **Aire du fond** : le fond est un carré de côté $12 - 2x$, donc

$$A(x) = (12 - 2x)^2 = 4x^2 - 48x + 144$$

— **Domaine** : $0 < x < 6$ (il faut $12 - 2x > 0$).

b) **Équation** : $(12 - 2x)^2 = 64$ donne $12 - 2x = 8$ (la racine positive, car $12 - 2x > 0$), soit

$$x = 2 \text{ cm}$$

- **Vérification** : le fond mesure alors $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$ ✓
- L'autre cas, $12 - 2x = -8$, donnerait $x = 10$, hors du domaine.

c) **Aire de tôle** : le fond vaut $(12 - 2x)^2$ et chacun des quatre côtés est un rectangle $x \times (12 - 2x)$.

$$T(x) = (12 - 2x)^2 + 4x(12 - 2x) = 144 - 48x + 4x^2 + 48x - 8x^2 = 144 - 4x^2$$

- **Simplification remarquable** : $T(x) = 144 - 4x^2$ — les termes en x se compensent exactement.
- **Variation** : T est **strictement décroissante** sur $]0 ; 6[$, donc elle n'a **pas de minimum** atteint : l'aire tend vers $144 - 144 = 0$ quand $x \rightarrow 6$, sans jamais l'atteindre.
- **Interprétation** : l'aire de tôle utilisée est toujours inférieure aux 144 cm^2 de la plaque, la différence $4x^2$ étant exactement l'aire des **quatre carrés découpés** ✓
- **Contrôle** : pour $x = 2$, $T(2) = 144 - 16 = 128 \text{ cm}^2$, et directement $64 + 4 \times 2 \times 8 = 64 + 64 = 128$ ✓
- **Remarque** : c'est le **volume** $V(x) = x(12 - 2x)^2$ qui admet un maximum (pour $x = 2$ cm, avec $V = 128 \text{ cm}^3$) — mais son étude relève du degré 3 et de la dérivation.

Réponse. a) $A(x) = (12 - 2x)^2$, $0 < x < 6$ · b) $x = 2$ cm · c) $T(x) = 144 - 4x^2$, décroissante (pas de minimum atteint).