

Plaquette 4 – Problèmes d'optimisation

Second degré – Première spé maths

Exercices

Méthode

Un problème d'optimisation se résout toujours dans le même ordre : **nommer l'inconnue** et son domaine, **exprimer** la quantité à optimiser sous forme d'un trinôme, passer à la **forme canonique**, conclure par le sommet — sans oublier de vérifier que la valeur trouvée appartient au domaine autorisé.

Exercice 1 – Minimum ou maximum ?

Pour chaque fonction, préciser si elle admet un minimum ou un maximum, puis donner la valeur de cet extremum et la valeur de x où il est atteint.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

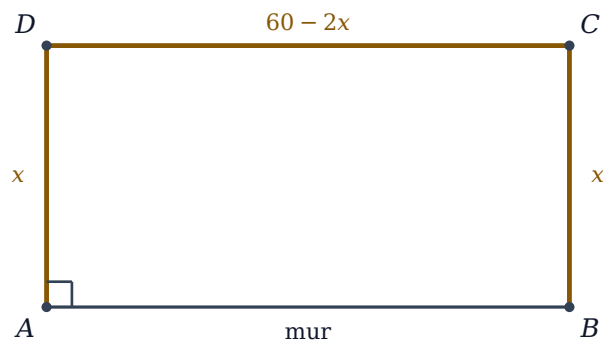
b) $g(x) = -2x^2 + 8x$

c) $h(x) = 3x^2 + 6x + 5$

d) $k(x) = -x^2 - 6x$

Exercice 2 – L'enclos contre le mur

Un éleveur dispose de 60 m de grillage pour délimiter un enclos rectangulaire **adossé à un mur** : seuls trois côtés sont à grillager. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ?



Trois côtés grillagés (en gras), le quatrième est le mur

Exercice 3 – Deux nombres de somme fixée

Deux nombres réels ont pour somme 20. Quel est le plus grand produit qu'ils puissent avoir ?

Exercice 4 – Somme des carrés minimale

Deux nombres réels ont pour somme 12. Déterminer la plus petite valeur possible de la somme de leurs carrés.

Exercice 5 - Le bénéfice de l'atelier

Un atelier fabrique x dizaines de pièces par jour, avec $0 \leq x \leq 25$. Son bénéfice quotidien, en euros, est donné par $B(x) = -3x^2 + 90x - 300$.

- Quelle production rend le bénéfice maximal ? Combien vaut-il ?
- L'atelier peut-il espérer un bénéfice de 500 € par jour ?

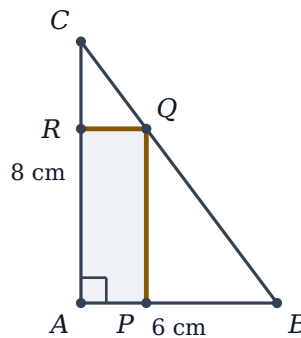
Exercice 6 - Le prix de l'abonnement

Un club sportif constate que, s'il fixe l'abonnement annuel à p euros, il compte $2000 - 20p$ adhérents (modèle valable pour $0 \leq p \leq 100$). Quel prix maximise la recette totale ?

Exercice 7 - Le rectangle inscrit dans le triangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. On inscrit un rectangle $APQR$ avec P sur $[AB]$, Q sur $[BC]$ et R sur $[AC]$. On pose $AP = x$.

Déterminer la valeur de x qui rend l'aire du rectangle maximale.



Rectangle $APQR$ inscrit, avec $AP = x$

Exercice 8 - Le point le plus proche sur une droite

Dans un repère orthonormé, d est la droite d'équation $y = 2x - 1$ et $A(3; 1)$. Déterminer les coordonnées du point M de d le plus proche de A , et la distance AM correspondante.

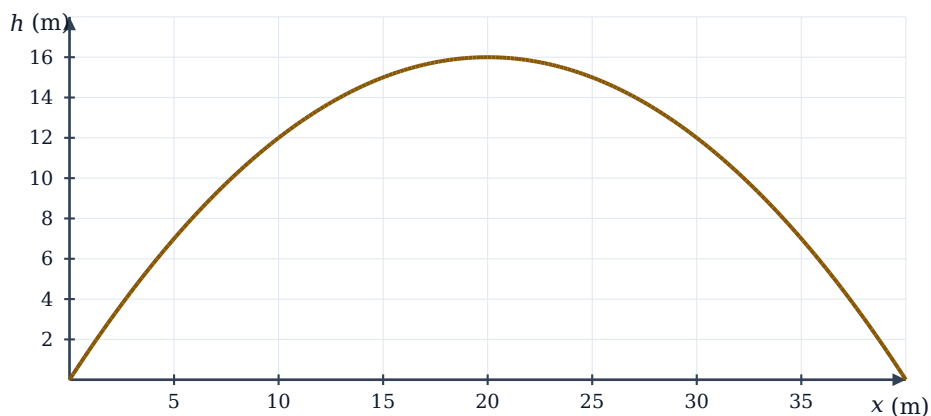
Exercice 9 - Le fil coupé en deux

Un fil de fer de 40 cm est coupé en deux morceaux. Avec le premier morceau, de longueur x , on forme un carré ; avec le second, un autre carré. Comment couper le fil pour que la somme des aires des deux carrés soit minimale ?

Exercice 10 - L'arche du pont

L'arche d'un pont a la forme d'une parabole d'équation $h(x) = -0,04x^2 + 1,6x$, où x et $h(x)$ sont en mètres, pour $0 \leq x \leq 40$.

- a) Quelle est la hauteur maximale de l'arche ?
- b) Quelle est la largeur de l'arche à 12 m de hauteur ?



Profil de l'arche

Exercice 11 - Quand le sommet est hors du domaine

Le coût de production, en milliers d'euros, de x tonnes d'un produit est $C(x) = x^2 - 10x + 40$, où la capacité de l'usine impose $6 \leq x \leq 12$.

Déterminer la production qui minimise le coût sur ce domaine.

Exercice 12 - Baisser le prix des billets ?

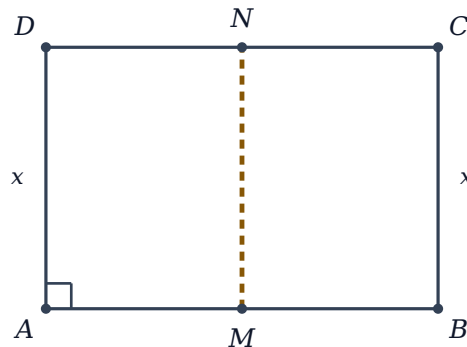
Une salle de spectacle vend ses billets 15 € et accueille 400 spectateurs. Une étude montre que chaque baisse de 1 € sur le prix attire 40 spectateurs supplémentaires. On note x la baisse consentie, en euros, avec $0 \leq x \leq 15$.

Déterminer la baisse qui maximise la recette, et la recette correspondante.

Exercice 13 - L'enclos partagé en deux

Avec 90 m de grillage, on veut clôturer un enclos rectangulaire **et** le partager en deux parties égales par une cloison parallèle à la largeur. On note x la largeur, en mètres.

Déterminer les dimensions qui rendent l'aire totale maximale.



La cloison (en pointillé) est parallèle à la largeur

Exercice 14 - La vitesse la plus économique

La consommation d'un camion, en litres aux 100 km, est modélisée par $c(v) = 0,005v^2 - 0,6v + 30$, où v est la vitesse en km/h, pour $40 \leq v \leq 110$.

- Quelle vitesse minimise la consommation ? Combien vaut-elle alors ?
- La consommation à 100 km/h est-elle supérieure ou inférieure à celle à 40 km/h ?

Exercice 15 - Produire, mais combien ?

Un producteur vend x tonnes de sa récolte. Sa recette, en centaines d'euros, est $R(x) = -0,5x^2 + 40x$ et son coût total $C(x) = 10x + 150$, pour $0 \leq x \leq 60$.

- Exprimer le bénéfice $B(x)$ et déterminer la production qui le rend maximal.
- À partir de combien de tonnes le producteur devient-il bénéficiaire ? Arrondir au dixième.

Exercice 16 - Les deux avions

Dans un repère orthonormé gradué en kilomètres, un avion A se trouve à l'instant t (en heures) au point de coordonnées $(60t - 100 ; 0)$ et un avion B au point $(0 ; 80t)$.

Déterminer l'instant où la distance entre les deux avions est minimale, et cette distance.