

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : paramètres, optimisation et modélisation

Second degré — Première spé maths

Exercices

Méthode

On choisit à chaque fois la **bonne forme** du trinôme (développée, canonique, factorisée), on discute selon un **paramètre**, et on modélise des problèmes d'**optimisation** et d'**aire**.

Exercice 1 - Les trois formes

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$. Donner la forme canonique et la forme factorisée, puis le sommet de la parabole.

Exercice 2 - Équation avec paramètre

Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ admet-elle deux solutions distinctes ?

Exercice 3 - Inéquation du second degré

Résoudre $-3x^2 + 5x + 2 \geq 0$.

Exercice 4 - Somme et produit

Deux nombres ont pour somme 7 et pour produit 10. Les déterminer sans tâtonner.

Exercice 5 - Optimisation d'une aire

On dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire contre un mur (le mur remplace un côté). Quelles dimensions donnent l'aire maximale ?

Exercice 6 - Trinôme toujours positif

Pour quelles valeurs de m a-t-on $x^2 + mx + 9 > 0$ pour tout réel x ?

Exercice 7 - Position relative de deux courbes

Déterminer la position relative des courbes de $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x - 5$.

Exercice 8 - Équation bicarrée

Résoudre $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Exercice 9 - Racine connue

Le trinôme $f(x) = 3x^2 + bx - 6$ admet 2 pour racine. Déterminer b et l'autre racine.

Exercice 10 - Problème de bénéfice

Une entreprise produit x centaines d'articles. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -2x^2 + 24x - 40$. Déterminer la plage de rentabilité et le bénéfice maximal.

Exercice 11 - Système et second degré

Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

Exercice 12 - Tangente à une parabole

Pour quelle valeur de m la droite d'équation $y = 4x + m$ est-elle tangente à la parabole $y = x^2$?

Exercice 13 - Discussion complète

Discuter, selon m , le nombre de solutions de $mx^2 - 4x + 1 = 0$.

Exercice 14 - Trajectoire d'un projectile

La hauteur d'un ballon, en mètres, est $h(t) = -5t^2 + 15t + 1$ où t est en secondes. Déterminer la hauteur maximale et l'instant où le ballon touche le sol.

Exercice 15 - Synthèse : boîte de volume maximal

Dans une plaque carrée de côté 12 cm, on découpe quatre carrés de côté x aux coins et on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

- Exprimer l'aire du fond en fonction de x et donner le domaine de x .
- Pour quelle valeur de x l'aire du fond vaut-elle 64 cm^2 ?
- Exprimer l'aire totale de tôle utilisée (fond + quatre côtés) et la minimiser.